

TESIS DOCTORAL

Análisis Mecánico Inteligente: Metodología para el estudio paramétrico de mecanismos

Autor:

Eduardo Corral Abad

Directores:

Jesús Meneses Alonso

Juan Carlos García-Prada

Departamento de Ingeniería Mecánica

Leganés, diciembre 2014



TESIS DOCTORAL

Análisis Mecánico Inteligente: Metodología para el estudio paramétrico de mecanismos

Autor: **EDUARDO CORRAL ABAD**

Directores:

JESÚS MENESES ALONSO

JUAN CARLOS GARCÍA-PRADA

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente: (Nombre y apellidos)

Vocal: (Nombre y apellidos)

Secretario: (Nombre y apellidos)

Calificación:

Leganés/Getafe, de de



Índice

1. Introducción.....	11
1.1. Motivación	12
1.2. Objetivos.....	14
1.3. Estructura del documento	18
1.4. Estado del arte	19
1.4.1. Análisis de mecanismos.....	19
1.4.2. Análisis dinámico de robots.....	23
2. PASIBOT.....	25
2.1. ¿Qué es un robot?	26
2.2. Robótica y su historia.....	26
2.3. Tipos de robots	31
2.4. Historia de los robots bípedos	34
2.5. Descripción del PASIBOT	40
3. Análisis Mecánico Inteligente: Aplicación al PASIBOT	46
3.1. Metodología propuesta	47
3.2. Nomenclatura	49
3.3. Medidas del PASIBOT.....	51
3.4. Cinemática del PASIBOT sin deslizar	54
3.5. Cinemática con deslizamiento del PASIBOT	64
3.6. Dinámica del PASIBOT	65
3.7. Dinámica inversa del PASIBOT	65
3.8. Dinámica directa del PASIBOT	81
3.9. Dinámica con deslizamiento del PASIBOT	86
3.10. Doble apoyo	91
3.11. Degeneraciones del PASIBOT.....	93
3.12. Programa	94
4. Pruebas y resultados	97
4.1. Resumen de los resultados:.....	98
4.2. Comparación con Programas de Simulación	99
4.3. Variando parámetros para la solución Dinámica inversa pie fijo para una w8 concreta y constante.	106
4.4. Solución Dinámica inversa pie deslizando	115
4.5. Solución Dinámica directa	121
4.6. Análisis de la cadera del PASIBOT	123

4.7.	Calculo del momento de vuelco y balanceo	131
5.	Aplicación a un UGV.....	136
5.1.	Introducción.....	136
5.1.1.	Motivación	137
5.1.2.	Objetivo	138
5.1.3.	Definición de UGV.	139
5.1.4.	Tipos de UGV:	141
5.2.	Nomenclatura del UGV	144
5.3.	Problema de la posición del UGV	145
5.4.	Modelo cuasi-estático.....	147
5.5.	Algoritmo	149
5.6.	Resultados numéricos.....	150
6.	Conclusiones y trabajos futuros.....	154
6.1.	Conclusiones	155
6.2.	Conclusiones relativas al PASIBOT	156
6.3.	Conclusiones relativas al UGV	157
6.4.	Trabajos futuros.....	158
6.5.	Conclusions	160
7.	Bibliografía.....	161
8.	Anexos.....	165
	Anexos:.....	166

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: INVESTIGADORES DEL GRUPO MAQLAB REALIZANDO MEDICIONES EN LAS INSTALACIONES DE LA UC3M	13
FIGURA 2: UN MECANISMO DE CADENA CERRADA Y OTRO DE CADENA ABIERTA.	19
FIGURA 3: MECANISMO EN COORDENADAS RELATIVAS	20
FIGURA 4: MECANISMO EN COORDENADAS DE PUNTO DE REFERENCIA	21
FIGURA 5: MECANISMO EN COORDENADAS NATURALES.....	21
FIGURA 6: ROBOT FABRICADO POR TOYOTA.....	27
FIGURA 7: AIBO DE SONY	29
FIGURA 8: ASIMO DE HONDA	29
FIGURA 9: ISAAC ASIMOV	29
FIGURA 10: ROBOT UGV DE DESACTIVACIÓN DE ARTEFACTOS.....	33
FIGURA 11: TELEMANIPULADOR.....	33
FIGURA 12: PLANO ORIGINAL DE LA PATENTE DE WILSON WALKIE.	34
FIGURA 13: JUGUETE “WILSON WALKIE”. DE LA DÉCADA DE LOS 30 DEL SIGLO XX	35
FIGURA 14: EVOLUCIÓN DEL ROBOT BÍPEDO PASIVO DE MCGEER AL ROBOT DE WISSE Y RUINA.....	36
FIGURA 15: ROBOT DE LA UNIVERSIDAD DE CORNELL.	37
FIGURA 16: ROBOT TODDLERS.....	38
FIGURA 17: ROBOT DENISE.....	38
FIGURA 18: ROBOT NAGOYA (2005).	39
FIGURA 19: SOLAR ROBOT	39
FIGURA 20: PRIMER PROTOTIPO CONSTRUIDO POR EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN MAQLAB.....	40
FIGURA 21: NOMENCLATURA DE LOS ESLABONES DEL PASIBOT	41
FIGURA 22: MECANISMO DE CHEBYSHOV.	41
FIGURA 23: PAFNUTI LVÓVICH CHEBYSHOV (ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЁВ)	42
FIGURA 24: ANTIGUO PANTÓGRAFO DE DIBUJO.	42
FIGURA 25: PANTÓGRAFO DE DIBUJO.....	43
FIGURA 26: CHEBYSHOV Y PANTÓGRAFO JUNTOS.....	43
FIGURA 27: LA CADERA CON LA DIRECCIÓN DE LA CORREDERA Y EL PUNTO DE APOYO DE LA MANIVELA RECUADRADO.	44
FIGURA 28: EL PASIBOT CON LAS PARTES DIFERENCIADAS.	45
FIGURA 29: SECUENCIA DEL PASO DEL PASIBOT.	45
FIGURA 30: ORGANIGRAMA DEL “ANÁLISIS MECÁNICO INTELIGENTE”	48
FIGURA 31: NOMENCLATURA DETALLADA DE LOS ESLABONES DEL PASIBOT.	49
FIGURA 32: DIMENSIONES DEL PASIBOT.....	52
FIGURA 33: CADERA DEL PASIBOT EN EL CASO PRINCIPAL CON EL CENTRO DE MASAS REPRESENTADO.....	53
FIGURA 34: DISTANCIAS Y ÁNGULOS DEL MECANISMO DE CHEBYCHOV.....	55
FIGURA 35: DISTANCIAS Y ÁNGULOS DEL MECANISMO DE EXTENSIÓN.....	57
FIGURA 36: DISTANCIAS Y ÁNGULOS DEL MECANISMO DE ESTABILIZACIÓN.....	58
FIGURA 37: ÁNGULO DE LA MANIVELA MOTOR PARA LA PIERNA DERECHA E IZQUIERDA CON SU DESFASE.....	60
FIGURA 38: CAMBIO DE BASE, TIERRA REFERIDA EN IZQUIERDA A LA CADERA Y DERECHA AL SUELO.	61

FIGURA 39: PROYECCIONES DE LA MITAD DEL ESLABÓN 2.....	62
FIGURA 40: PROYECCIONES DEL ESLABONES 2 Y 4.....	63
FIGURA 41: SISTEMA DE REFERENCIA PARA EL PASIBOT DESLIZANDO.....	64
FIGURA 42: FUERZAS SOBRE UN ESLABÓN.....	69
FIGURA 43: NOMENCLATURA DE LOS ESLABONES DEL PASIBOT.....	70
FIGURA 44: CADERA DEL PASIBOT CON LOS VECTORES DISTANCIA AL CENTRO DE MASAS.....	75
FIGURA 45. ESQUEMA DE FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL PIE DE APOYO.....	86
FIGURA 46: ALGORITMO CON POSIBILIDAD DE DESLIZAMIENTO.....	90
FIGURA 47: CADERA DEL PASIBOT MODIFICADO CON DOS CORREDERAS.....	93
FIGURA 48: ESQUEMA DEL PROGRAMA DEL ANEXO 1.....	96
FIGURA 49: EL PROGRAMA CALCULANDO UNA SOLUCIÓN.....	96
FIGURA 50: PROTOTIPO DEL PASIBOT CONSTRUIDO POR EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN MAQLAB.....	99
FIGURA 51: MOVIMIENTO DEL ROBOT PASIBOT GENERADO EN WORKING MODEL.	100
FIGURA 52. REPRESENTACIÓN DE LAS FUERZAS QUE INTERACTÚAN ENTRE EL PIE DE APOYO (ESLABÓN 1) Y LA TIERRA (ESLABÓN 0).....	115
FIGURA 53: PLANOS DE LA CADERA DEL PASIBOT CON LAS UNIDADES EN MILÍMETROS.....	123
FIGURA 54: CADERA MODELADA EN ANSYS.....	124
FIGURA 55: UBICACIÓN DE LAS FUERZAS.....	126
FIGURA 56: CADERA MALLADA.....	128
FIGURA 57: TENSIÓN DE VON MISES.....	128
FIGURA 58: DEFORMADA EN X.....	129
FIGURA 59: DEFORMADA EN Y.....	129
FIGURA 60: DESPLAZAMIENTOS EN AUTOESCALA.....	130
FIGURA 61: MOMENTOS DE BALANCEO, VUELCO Y GIRO.....	133
FIGURA 62: LOGOTIPO DE FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING, MECHATRONICS, TTU.....	137
FIGURA 63: EL PROTOTIPO DE UGV CONSTRUIDO POR LA UNIVERSIDAD TALLINN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.....	138
FIGURA 64: UUV PLUTO PLUS 85.....	140
FIGURA 65: UAV PARROT AR DRONE.....	140
FIGURA 66: UGV PACKBOT.....	143
FIGURA 67: TALON EN UNA MISIÓN DE CAMPO.....	143
FIGURA 68: UGV GLADIATOR.....	144
FIGURA 69: VARIABLES QUE INTERVIENEN EN EL PROBLEMA CINEMÁTICO DEL UGV.....	145
FIGURA 70: CÁLCULO DE DISTANCIA ENTRE EJES.....	145
FIGURA 71: ESQUEMA PARA LA LOCALIZACIÓN DEL CENTRO DE LA RUEDA TRASERA.....	146
FIGURA 72: ESQUEMA DE CÁLCULO DE LAS VARIABLES ANGULARES.....	146
FIGURA 73: SUBSISTEMAS DEL VEHÍCULO.....	147
FIGURA 74: ESQUEMA DE LAS POSICIONES Y ÁNGULOS DEL UGV.....	148
FIGURA 75: PAR, FUERZAS NORMALES Y ÁNGULOS DE ATAQUE PARA DIFERENTES CUESTAS.....	150
FIGURA 76: A) ESQUEMA B) ÁNGULOS DE CONFIGURACIÓN C) EL PAR DEL VEHÍCULO.....	151

FIGURA 77: ESQUEMA DE LA SUPERACIÓN DE UN ESCALÓN EN FUNCIÓN DEL RADIO.....	151
FIGURA 78. RESULTADOS DE LA SUPERACIÓN DE UN ESCALÓN EN FUNCIÓN DEL RADIO.....	152
FIGURA 79. POSICIÓN DE MÍNIMO PARA EMPEZAR UNA RAMPA.....	152
FIGURA 80: A) PAR EN FUNCIÓN DE LOS ÁNGULOS DE ATAQUE B) PAR MÍNIMO MIENTRAS ESTA EN MOVIMIENTO.	153
FIGURA 81: PLANOS DEL RODAMIENTO SKF UTILIZADO EN EL PASIBOT	159

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: ENUMERACIÓN DE LOS ESLABONES DIFERENTES DEL BÍPEDO	50
TABLA 2: CON LAS MEDIDAS DE LOS ESLABONES DE LA PIERNA IZQUIERDA Y DERECHA:	51
TABLA 3: COMPARATIVA DE LAS POSICIONES DEL CENTRO DE MASA DEL ESLABÓN 3:	100
TABLA 4: COMPARATIVA DE LAS VELOCIDADES DEL CENTRO DE MASA DEL ESLABÓN 3:	100
TABLA 5: COMPARATIVA DE LAS ACELERACIONES DEL CENTRO DE MASA DEL ESLABÓN 3:	101
TABLA 6: POSICIÓN DE LA CADERA DURANTE UN PASO	102
TABLA 7: VELOCIDADES EN UN INSTANTE DADO	102
TABLA 8: ACELERACIONES EN EL INSTANTE INICIAL	103
TABLA 9: FUERZAS EN NEWTON SOBRE LA CADERA TENIENDO EN CUENTA PESOS DEL MOTOR, CARRETES Y SUJECIONES.	125
TABLA 10: DATOS DE FUERZAS PARA LAS SIMULACIONES EN ANSYS	125
TABLA 11: FUERZAS (N) Y TENSIONES (MPA) APLICADAS Y UBICACIONES	127
TABLA 12: TODAS LAS FUERZAS EXTERNAS DE TODOS LOS ESLABONES PARA UN SEMIPERÍODO.	131

ÍNDICE DE GRÁFICAS

GRÁFICA 1: PAR QUE EL MOTOR PROPORCIONA A LA MANIVELA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO $[0,1\text{S}]$	103
GRÁFICA 2: FUERZA QUE EJERCE EL ESLABÓN1 SOBRE EL ESLABÓN 2.....	104
GRÁFICA 3: FUERZA QUE EJERCE EL ESLABÓN8 SOBRE EL ESLABÓN 14 EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.	104
GRÁFICA 4: POSICIONES DEL CENTRO DE PERCUSIÓN, CENTRO DE MASA Y ZMP DEL PASIBOT DURANTE UN PASO.	105
GRÁFICA 5: EL PAR DEL MOTOR PARA CINCO VALORES DIFERENTES DE W_8	107
GRÁFICA 6: EL PAR DEL MOTOR PARA VALORES MUY BAJOS DE W_8	108
GRÁFICA 7: LA FUERZA F_{12} CON NUEVE VALORES DIFERENTES DE W_8	109
GRÁFICA 8: LA FUERZA F_{12} CON CINCO VALORES MUY BAJOS DE W_8	110
GRÁFICA 9: LA FUERZA F_{814} PARA DIFERENTES VALORES DE W_8	110
GRÁFICA 10: LA FUERZA F_{814} CON OCHO VALORES DIFERENTES DE W_8	111
GRÁFICA 11: LA FUERZA F_{37} PARA DIFERENTES VALORES DE W_8	111
GRÁFICA 12: EL PAR PARA EL PASIBOT DE TITANIO Y DE ALUMINIO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO[S].....	112
GRÁFICA 13: EL PAR PARA EL PASIBOT CON VARIOS PESOS EXTRA.....	113
GRÁFICA 14: LA FUERZA MÁXIMA SUFRIDA POR EL PASIBOT PARA VARIOS PESOS EXTRA.....	114
GRÁFICA 15: REPRESENTACIÓN DEL COEFICIENTE LÍMITE DE DESLIZAMIENTO PARA EL PIE PARA DIFERENTES VELOCIDADES DEL MOTOR.	116
GRÁFICA 16: EL DESLIZAMIENTO DEL PIE DE APOYO DEL PASIBOT PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE ROZAMIENTO CON UNA VELOCIDAD MOTOR IGUAL A 3 RAD/S.....	117
GRÁFICA 17: EL DESLIZAMIENTO DEL PIE DE APOYO DEL PASIBOT PARA DIFERENTES VELOCIDADES ANGULARES DEL MOTOR CON UN COEFICIENTE DE ROZAMIENTO BAJO (0.05)	118
GRÁFICA 18: EL DESLIZAMIENTO DEL PIE DE APOYO DEL PASIBOT PARA DIFERENTES VELOCIDADES ANGULARES DEL MOTOR CON UN COEFICIENTE DE ROZAMIENTO BAJO (0.1)	118
GRÁFICA 19: EL DESLIZAMIENTO DEL PIE DE APOYO DEL PASIBOT PARA DIFERENTES COEFICIENTES DE ROZAMIENTO CON UNA VELOCIDAD DEL MOTOR IGUAL A 0.3 RAD/S.	119
GRÁFICA 20: EL DESLIZAMIENTO PARA UNA VELOCIDAD MOTOR $W_8=5$ RAD/S Y UN COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICO $\mu_E=0,2$ Y VARIOS COEFICIENTE DE FRICCIÓN DINÁMICOS μ_D	120
GRÁFICA 21: EL DESLIZAMIENTO PARA UNA VELOCIDAD MOTOR $W_8=3$ RAD/S Y UN COEFICIENTE DE FRICCIÓN DINÁMICOS $\mu_D=0,03$ Y VARIOS COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICO μ_E	120
GRÁFICA 22: EL ÁNGULO DEL MOTOR GIRADO EN FUNCIÓN DEL PAR DADO.....	121
GRÁFICA 23: EL ÁNGULO DEL MOTOR GIRADO EN FUNCIÓN DEL PAR DADO OBTENIDO CON WORKING MODEL 2D	122
GRÁFICA 24: EL ÁNGULO DEL MOTOR GIRADO EN FUNCIÓN DEL PAR DADO CON PESOS DISTINTOS.....	122
GRÁFICA 25: TRAYECTORIA DEL ZMP DEL BÍPEDO PASIBOT A LO LARGO DE UN PASO.	135

Resumen

Esta Tesis Doctoral se centra en el campo de la robótica pasiva, y más concretamente en el análisis, diseño, evaluación y su aplicación a los robots caminantes. Entre otras ventajas potenciales que ofrecen los análisis dinámicos directo e inverso de un caminante, se pueden destacar como las más significativas: controlar el riesgo de deslizamiento, mejorar la estabilidad mediante el control de la distribución de las fuerzas en las patas, disminuir la influencia de perturbaciones externas o internas (incluyendo errores de modelado), mejorar la adaptación al entorno, conseguir movimientos suaves (acomodaticios) del robot, evitar vibraciones innecesarias en la estructura mecánica, y optimizar el consumo de energía para hacer a los robots más autónomos.

Entre los diversos tipos de robots caminantes posibles, se ha afrontado el estudio cinemático y dinámico en dos casos de especial interés: un bípedo humanoide y un vehículo UGV (Unmanned Ground Vehicle: vehículo terrestre no tripulado), que presentan problemáticas diferenciadas, y también algunos elementos comunes. En la tesis se investigan y proponen nuevos métodos de análisis y algoritmos, tanto directos, inversos o cuasi-estáticos que aportan nuevas soluciones a la mecánica de las máquinas objeto de estudio, que son de especial interés cuando éstas se desplazan por terreno irregular o están sometidas a perturbaciones.

En esta tesis se presenta un robot bípedo con numerosos eslabones pero un sólo un actuador, basado en la combinación de mecanismos articulares clásicos, que desarrollan el movimiento completo de caminar. Es decir, el mecanismo completo posee un único grado de libertad, y ha sido bautizado con el nombre de PASIBOT. Así pues, se ha realizado el análisis mecánico completo y exhaustivo del robot PASIBOT

Esta metodología puede ser aplicada a otros mecanismos, vehículos o robots. Y una de las aportaciones en esta investigación es un análisis cuasi-estático realizado a un UGV con la misma filosofía de minimizar la pérdida de energía haciéndolo más pasivo y óptimo mediante un análisis mecánico fundamental.

Sobre las dos plataformas seleccionadas, se han llevado a cabo numerosos experimentos con la finalidad de verificar el grado de consecución de los objetivos propuestos, con resultados muy satisfactorios.

Abstact

This thesis focuses on the field of passive robotics, and more specifically in the analysis, design, evaluation and implementation of walking robots. In the potential advantages of direct and inverse dynamic analysis of a walker, can be highlighted as the most significant: control the risk of slippage, improve stability by controlling the distribution of forces in the legs, reduce the influence of external or internal disturbances (including modeling errors), better adaptation to the environment, getting smooth movements (accommodating) of the robot, avoid unnecessary vibrations in the mechanical structure, and optimize energy consumption for the most autonomous robots.

Among the various possible types of walking robots, has tackled the kinematic and dynamic study in two cases of particular interest: a humanoid biped and UGV vehicle (Unmanned Ground Vehicle), which have different problems, and some common elements. The thesis research and propose new analysis methods and algorithms, both direct, inverse or quasi-static to bring new solutions to the mechanics of the machines under consideration, which are of particular interest when they travel on rough terrain or are subject to disturbances.

In this thesis a biped robot with numerous links but only one actuator, based on the combination of classic joint mechanisms that develop full walking motion is presented. That is, the whole mechanism has a single degree of freedom, and has been named to PASIBOT. Thus, there has been a complete and comprehensive analysis of PASIBOT mechanical robot

This methodology can be applied to other mechanisms, vehicles or robots. And one of the contributions in this research is a quasi-static analysis to a UGV with the same philosophy to minimize energy loss and optimum passive making it through a fundamental mechanical analysis.

On the two selected platforms, have conducted numerous experiments in order to verify the degree of achievement of the objectives, with very satisfactory results.

Capítulo I

1. Introducción

1.1. Motivación

En las dos últimas décadas se ha constatado un creciente interés en los robots caminantes, y se aprecia un aumento significativo en la actividad investigadora en esta área. Los horizontes de aplicación de esta nueva clase de robots se están ampliando, siendo preciso resolver diversos problemas, teóricos y de índole práctica, que dificultan su empleo y ponen barreras a su difusión.

Entre los temas que hay que abordar, y que están siendo objeto de atención preferente por los científicos en el ámbito internacional, se encuentran los relacionados con la mejora de su autonomía y la optimización de su movimiento. Los estudios se están realizando desde diversos puntos de vista: unos, con el objetivo de mejorar las características de velocidad, fiabilidad, consumo energético, interacción con el entorno, y otros tendentes a dotar a los robots caminantes de nuevas prestaciones.

Aquí es donde entra la motivación de esta tesis: Hoy en día para conseguir un comportamiento deseado, se tiende a añadir sensores y actuadores con sistemas de control just-in-time. Lo cual, funciona pero tal vez no de la manera más óptima. Sin embargo, creemos que la herramienta de partida ha de ser un análisis fundamental y profundo de la mecánica del mecanismo, que ha de permitir ampliar el campo de soluciones a distintas situaciones o condiciones de contorno, antes de abordar las estrategias de control y optimización.

Por expresarlo con un ejemplo: para mantener la velocidad del coche constante con el “control-cruiser”, se puede configurar un sensor y un actuador que regule el acelerador para que entregue más par si el vehículo baja de la velocidad deseada o deje de hacerlo si la supera. Con esto se consigue la velocidad constante con el margen de error deseado. Pero también se puede realizar el análisis mecánico fundamental para calcular cuánto hay que abrir la válvula del acelerador para cada circunstancia (tipo de carretera, trazado, pendiente, etc). Con los dos métodos se consigue la velocidad constante, pero pensamos que ambos deben complementarse: entendiendo primero el problema desde las bases de la mecánica clásica, el control y la optimización serán más eficientes.

No hay ninguna duda que el poder muscular es necesario para andar, al igual que un avión necesita el motor para volar. En los dos casos, se trata de una “máquina” activa, con la diferencia que el ser humano, al igual que todos los animales, tendemos a ser máquinas lo más pasivas posible, tratando de aprovechar la inercia y la gravedad para realizar las funciones con el menor gasto de energía posible.

McGeer en 1990 estudió el caminar totalmente pasivo, empleando la gravedad como única fuerza impulsora.

Una de las motivaciones de esta Tesis es el diseño y optimización mecánica del robot PASIBOT partiendo de los métodos de la Mecánica Clásica para su

análisis. La idea es utilizar los conocimientos de la dinámica pasiva para lograr mejorar las prestaciones de los mecanismos activos, logrando la movilidad de éstos con el menor gasto energético.

La presente tesis ha sido realizada en el grupo de investigación MAQLAB, del departamento de Ingeniería Mecánica y el departamento de automática de la UNIVERSIDAD CARLOS III MADRID. También se debe englobar en el marco de colaboración con el laboratorio di Robótica e Máquinas (LARM) de la UNIVERSIDAD DE CASSINO DE ITALIA y la universidad de Estonia, Tallinn, TALLINN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY.[1],[2]



Figura 1: investigadores del grupo MaqLab realizando mediciones en las instalaciones de la UC3M

1.2. Objetivos

El objetivo principal de esta tesis es realizar un análisis de la cinemática y la dinámica de mecanismos mediante un método que hemos denominado “análisis mecánico inteligente”. Esta metodología tiene como objetivo analizar el mecanismo entero de forma paramétrica, con la gran ventaja de poder optimizar, minimizar gastos energéticos, evitar deslizamientos, vuelcos, e incluso hacer variaciones en el diseño para minimizar los actuadores y el control. Para ello se diseñará un algoritmo que, aplicando las ecuaciones de la mecánica clásica en un programa de cálculo, pueda darnos la información que buscamos de una forma explícita y paramétrica que los actuales softwares de simulación comercial de propósito general son incapaces de proporcionar.

Esta tesis presenta un salto cualitativo en el campo de los robots de servicio, desarrollando un robot bípedo de tamaño natural y ligero de pocos grados de libertad, con un número menor de actuadores al de las articulaciones que posea. Los robots humanoides actuales tienen un número alto de grados de libertad que en la mayoría de los casos hace que tengan un peso elevado en las piernas debido al peso de sus correspondientes motores y actuadores. Este hecho hace que los robots humanoides sean muy costosos. Este proyecto plantea un diseño de robot bípedo. Se estudiarán mecanismos clásicos (Peaucellier, Watt, pantógrafo, etc.) que permitan desarrollar un paso adecuado (gait), mediante técnicas de control de dinámica pasiva. El robot PASIBOT será un bípedo con menos actuadores que juntas biológicas tiene una pierna humana (en este caso un solo actuador), y para ello se ha propuesto un diseño basado en la combinación de mecanismos articulares clásicos, capaz de desarrollar la cinemática completa de la pierna con un solo motor rotatorio.

El objetivo principal de esta tesis es aportar un algoritmo para realizar el análisis completo cinemático y dinámico de mecanismos. Se aplicará al campo de los robots y en concreto del robot PASIBOT para varias configuraciones diferentes.

Estos estudios se realizarán de forma teórica, según el método del “análisis mecánico inteligente” (diseñando un programa en MatLab que realice los cálculos uno a uno) siguiendo las leyes de la mecánica clásica y se compararán con los resultados de programas de simulación comerciales. También se procederá a la construcción del prototipo.

El análisis se realizará tanto directo (dadas las condiciones iniciales y las fuerzas exteriores obtener la evolución de la cinemática) como inverso (sabiendo

la cinemática deseada obtener las fuerzas o pares que es necesario aplicar para lograrlo).

Con estos datos y su posible comparación con las simulaciones cinemáticas, se podrá obtener información sobre: si son correctos los resultados, hasta qué punto son buenas las aproximaciones, dónde se obtienen las mayores fuerzas o momentos, los eslabones más peligrosos o de rotura más probable, el grosor, ancho o las densidades más apropiadas de los eslabones, cuándo desliza o vuelca, cómo optimizar el par o minimizar el gasto de energía y un sin fin de conclusiones o de comprobaciones de estados diferentes.

Así, los métodos y programas desarrollados pueden ser utilizados para futuros estudios o pruebas virtuales para diferentes robots, mecanismos o vehículos. Con esto se desea poder facilitar la unión entre lo activo y lo pasivo en cuanto a los robots de servicio. Y también facilitar el análisis de mecanismos sin tener que pagar costosas licencias de softwares comerciales que solo ofrecen resultados sin la capacidad de ver porqué ocurren esas relaciones.

Se pretende realizar el análisis mecánico completo y exhaustivo del mecanismo como ejemplo de la utilidad que puede tener las técnicas de control de dinámica pasiva.

Esta metodología puede ser aplicada a otros mecanismos, vehículos o robots. Otra de las aportaciones en esta investigación es el análisis cuasi-estático realizado a un ugv (unmanned ground vehicle) con la misma filosofía de análisis mecánico completo paramétrico y su comprensión para obtener las condiciones deseadas, en este caso mantener el par constante en diferentes terrenos o la menor variación de par.

A continuación se enumeran los objetivos que se intenta alcanzar en esta tesis, más detalladamente:

- El primero será entender el movimiento del PASIBOT y definir las dependencias topológicas y cinemáticas.
- Plantear las ecuaciones cinemáticas del PASIBOT. En este apartado habrá que realizar todos los estudios cinemáticos posibles para todos los casos teóricos: sin deslizamiento, con deslizamiento.
- Plantear las ecuaciones dinámicas del PASIBOT; tanto de la dinámica inversa como de la dinámica directa.

- Resolver completamente el análisis cinemático y dinámico teórico: obtener las ecuaciones, despejar las incógnitas, grados de libertad, etc... que se pueden obtener de todos los eslabones del PASIBOT.
- Crear un programa capaz de dar las soluciones numéricas de las ecuaciones cinemáticas y dinámicas para cada caso.
- Aplicar el programa para distintos casos y en función de varias variables. Como el peso, posibilidad de vuelco, etc..
- Comparar los resultados para verificar su exactitud y validez. Esta comparación será realizada con programas de simulación mecánica.
- Analizar los resultados y extraer las conclusiones y las propuestas para trabajos futuros. Una vez con el programa terminado y rectificado, se puede obtener toda la información que se quiera y se puede someter al PASIBOT a cualquier situación teórica cambiando todas las variables que se quieran.

Aquí se enumeran algunas de las posibles aplicaciones:

- Obtención del par del motor.
 - Obtención de la forma en que varia el par del motor en función de variables y situaciones.
 - Obtención de las fuerzas máximas y mínimas sobre cada eslabón.
 - Obtención del eslabón más solicitado.
 - Variación de la viabilidad al aumentar la velocidad del paso.
 - Variación del análisis cinemático y dinámico al cambiar el material o el peso del PASIBOT.
 - Momento de vuelco.
 - Posibles holguras y deslizamientos.
 - Realizar los cálculos para sistemas en 3D.
 - Calcular el comportamiento deslizando.
 - Calcular el camino más óptimo o las posiciones más óptimas en un terreno para minimizar el gasto energético.
 - Etc...
-
- Realizar el análisis a una máquina totalmente diferente: un vehiculo ugv. Este estudio deberá tener la misma filosofía de ahorro energético y control dinámico (buscando la mayor pasividad posible) pero realizándola

en equilibrio cuasi-estático. De este apartado se obtendrán otras ecuaciones y otro algoritmo de cálculo aplicando la misma motivación a un problema diferente: con la posibilidad de minimizar la energía, peso, camino optimo, camino con menor variación de par, etc...

- Para finalizar se redactará la memoria documental.

1.3. Estructura del documento

La memoria de esta tesis se estructura en cinco capítulos, la bibliografía y anexos:

Capítulo I, introducción

En el primer capítulo se realiza una breve introducción qué es un robot, la robótica, la evolución de los robots a lo largo de la historia y el estado del arte del análisis dinámico.

Capítulo II, PASIBOT

Se explican los tipos de robots, y las dos corrientes más importantes en el diseño de robots bípedos, presentando el modelo del cual parte esta tesis. A continuación se explicará detalladamente el funcionamiento y las partes de ese robot: el PASIBOT.

Capítulo III, Análisis cinemático y dinámico del PASIBOT

En esta capítulo, tras definir la nomenclatura usada, se realiza una descripción y explicación del análisis cinemático y dinámico usados. Se explicará los algoritmos usados para desarrollar el “análisis mecánico inteligente” mostrando y explicando los estudios paramétricos llevados a cabo.

Capítulo IV, Pruebas y resultados

Se empezará por comprobar si los resultados obtenidos con el programa desarrollado en esta tesis son correctos. Y esto se logra mediante la comparación con softwares comerciales (“Working model 2D”). Luego, se mostrarán varios de los estudios paramétricos realizados y la información útil y ventajas que han aportado. Con esto, se mostrara al lector la gran utilidad y la versatilidad de la mecánica inteligente para estudiar mecanismos complejos (robots bípedos en este caso).

Capítulo V, Aplicación a un UGV

En este apartado se aplicará el “análisis mecánico inteligente” a otro mecanismo totalmente diferente. Primero se explicará que es un UGV, brevemente su historia y los tipos. Para luego mostrar el algoritmo diseñado y los resultados obtenidos.

Bibliografía y anexos

1.4. Estado del arte

1.4.1. Análisis de mecanismos.

La Mecánica tradicional se divide en áreas: la estática y la dinámica. La estática estudia los sistemas que se supone van a estar en equilibrio. La dinámica se encarga de aquellos otros en movimiento.

Para ello se comenzó en los años 80 con el uso generalizado de ordenadores a nivel profesional, extendiéndose en los 90 a nivel doméstico. Pues bien, este hecho supuso un cambio radical en los métodos de resolución de problemas de muchas disciplinas ingenieriles, apareciendo en todos los ámbitos las soluciones numéricas, que se añaden a las tradicionales gráficas y analíticas. La cuestión era que las mencionadas soluciones tradicionales a los problemas ingenieriles poseían escasa potencia para abordar casos de cierta complejidad, limitándose su capacidad en muchas ocasiones a la resolución de sencillos problemas académicos con escasa relevancia real.

El planteamiento del análisis cinemático –y también del dinámico, como se verá más adelante–, se ve notablemente determinado por la elección de las variables que van a servir para modelizar el sistema mecánico. Tradicionalmente, se habían empleado las llamadas coordenadas independientes (ver Figura 2), iguales en número a los grados de libertad del sistema, y por lo tanto, número mínimo posible. Modelizar un mecanismo en coordenadas independientes quiere decir emplear tantos parámetros como grados de libertad posea el mecanismo. Sin embargo, estas coordenadas complican enormemente la resolución práctica de cualquier problema, sea cinemático o dinámico, pues conllevan procedimientos nada sistemáticos y, por tanto, difícilmente automatizables. La modelización en coordenadas independientes es la responsable del elevado nivel de dificultad de asignaturas clásicas en las Escuelas de Ingenieros tales como la Mecánica.

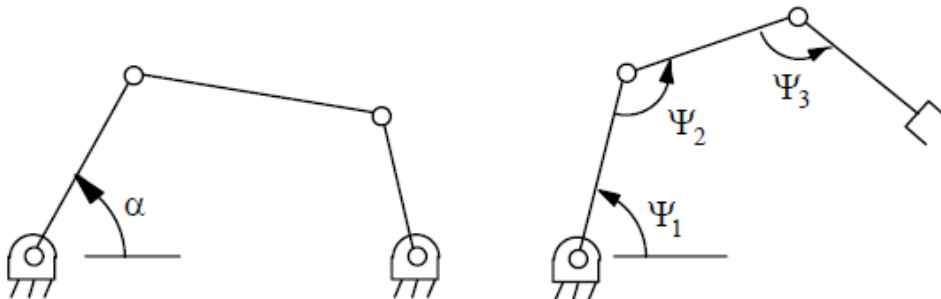


Figura 2: un mecanismo de cadena cerrada y otro de cadena abierta.

Como alternativa a las coordenadas independientes, surgieron las coordenadas dependientes. Estas coordenadas son superiores en número a los grados de libertad, y pretenden definir el movimiento de cada elemento de la máquina o mecanismo. Su carácter de dependientes se explica por estar relacionadas mediante ecuaciones algebraicas, que se denominan ecuaciones de restricción. Así pues, cada conjunto de variables dependientes, llevará asociadas unas ciertas ecuaciones de restricción. La ventaja de estas coordenadas frente a las independientes, es que dan lugar a procedimientos sistemáticos, muy aptos por tanto para su programación e implementación en un ordenador.

Se han propuesto tres familias de coordenadas dependientes: las coordenadas relativas, las coordenadas de punto de referencia y las coordenadas naturales. Las coordenadas relativas (ver Figura 3) —ángulos y distancias— son las correspondientes a los pares cinemáticos que unen los elementos de la máquina o mecanismo. Estas coordenadas fueron las primeras en ser utilizadas. Sitúan cada elemento del mecanismo con respecto al anterior en la cadena cinemática. Sus ecuaciones de restricción se obtienen por condiciones de cierre de lazos. Conducen a formulaciones que dependen de la topología del sistema mecánico, ya que hay que identificar los distintos lazos independientes del mecanismo.

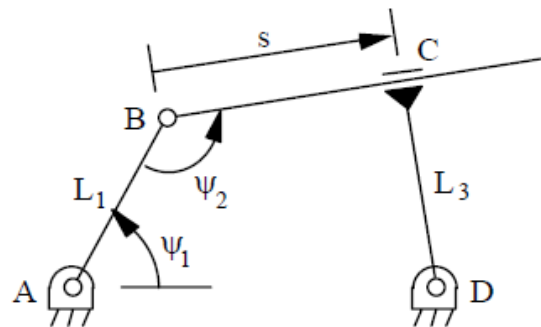


Figura 3: mecanismo en coordenadas relativas

Las coordenadas de punto de referencia (Figura 4) sitúan a cada sólido del mecanismo como si fuera libre. Para ello, se eligen las coordenadas de un punto cualquiera del elemento —típicamente el centro geométrico o el centro de masas—, y la orientación del mismo. En el caso plano la orientación quedará definida con un ángulo, y en el espacial requerirá el empleo de alguno de los múltiples sistemas existentes para definir la orientación de un triedro en el espacio: ángulos de Euler, ángulos de Bryant, matriz de rotación, parámetros de Euler, etc. Las ecuaciones de restricción surgen aquí de imponer las condiciones de los pares cinemáticos que unen los distintos elementos.

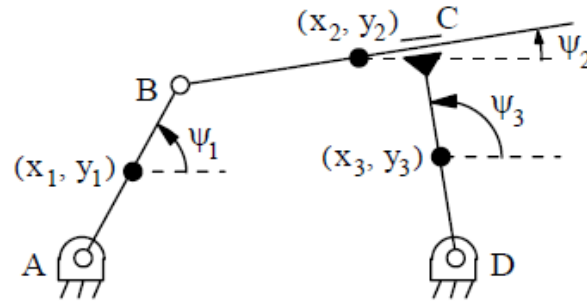


Figura 4: mecanismo en coordenadas de punto de referencia

Por último, las coordenadas naturales (Figura 5) están formadas por coordenadas cartesianas de puntos y componentes cartesianas de vectores unitarios. Los puntos y los vectores unitarios se ubican en los pares cinemáticos y sirven simultáneamente para definir elementos y pares. Las ecuaciones de restricción proceden de imponer las condiciones de sólido rígido de los elementos y la compatibilidad entre variables en algunos pares cinemáticos. Las coordenadas naturales son menores en número que las de punto de referencia, y conducen a ecuaciones de restricción mucho más simples.

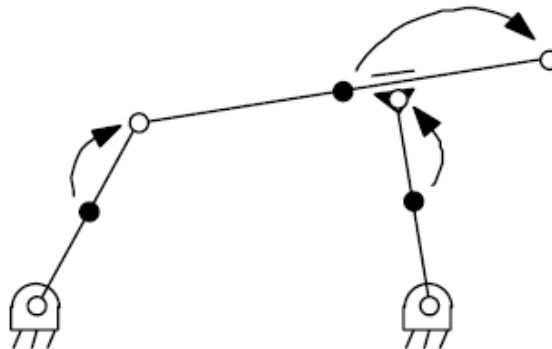


Figura 5: mecanismo en coordenadas naturales

Explicada la cuestión de las variables del problema, el análisis cinemático se resuelve con gran facilidad. El problema de posición consiste simplemente en resolver el sistema algebraico formado por las ecuaciones de restricción. Este sistema es habitualmente no lineal, y posee varias soluciones (hay varias posiciones posibles de los elementos del mecanismo para unos ciertos valores de las entradas o grados de libertad). Es por ello que suele resolverse acudiendo a una linealización y técnicas iterativas.

En cuanto al análisis dinámico directo, consiste en averiguar cuál va a ser el movimiento del sistema mecánico conocidas las fuerzas que actúan sobre él.

El planteamiento inicial consistió en plantear las ecuaciones de Lagrange en coordenadas dependientes, introduciendo por tanto los multiplicadores de Lagrange, que representan a las fuerzas de enlace que aseguran el cumplimiento de las restricciones. Dichas ecuaciones diferenciales se resuelven junto con las ecuaciones de restricción, dando lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas. Estos sistemas deben ser convertidos en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para poder aplicar los algoritmos de integración numérica existentes, aptos para este tipo de sistemas. Para ello, se derivan dos veces las ecuaciones de restricción.

Sin embargo, el método descrito resultó ser poco estable, robusto y preciso, por lo que se fueron proponiendo alternativas a la formulación de las ecuaciones dinámicas. Así, surgieron formulaciones también globales –es decir, en coordenadas dependientes–, tales como la de los penalizadores o la de Lagrange aumentado, que mejoran las propiedades del método inicial.

Todos los métodos comentados, tanto los que integran las variables dependientes a lo largo del tiempo, como los que integran sólo las variables independientes, son métodos globales, es decir, se implementan mediante superposición matricial. Se acumulan los términos cinemáticos o dinámicos correspondientes a todos los elementos y uniones y, finalmente, se resuelven sistemas de ecuaciones que proporcionan el valor de todas las incógnitas del problema. Es por ello que, cuando los sistemas mecánicos son grandes y complejos, lo que normalmente conlleva un elevado número de variables para modelizar el problema, es conveniente recurrir a técnicas de resolución de matrices dispersas para mejorar la eficiencia de los correspondientes algoritmos

Frente a los métodos globales, surgieron también los recursivos y semirecursivos, fundamentados generalmente en una modelización en coordenadas relativas, y fuertemente dependientes de la topología del mecanismo. Estos métodos, importados en su mayoría del campo de la Robótica, recorren la cadena cinemática del mecanismo una o más veces, planteando y resolviendo las ecuaciones cinemáticas y dinámicas de cada elemento en base a la información del elemento anterior y/o posterior. Se caracterizan por evitar la resolución de grandes sistemas de ecuaciones lineales –en ocasiones no se resuelve ninguno– y, en consecuencia, suelen ser muy eficientes.

En general, puede decirse que los métodos globales son más fáciles de automatizar, al no depender de la topología del mecanismo, y son por tanto más aptos para la confección de programas comerciales de propósito general,

mientras que los métodos recursivos y semi-recursivos, dependientes de la topología del sistema mecánico pero muy rápidos, son mejores candidatos para la construcción de simuladores de propósito particular que requieran gran velocidad de cálculo –por ejemplo, los realizados en esta tesis. [3][4][5]

1.4.2. Análisis dinámico de robots

La dinámica del robot relaciona el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo. El modelo dinámico establece relaciones matemáticas entre las posiciones, sus derivadas (velocidad y aceleración). Las fuerzas y pares aplicados y los parámetros del robot (masas de los eslabones, inercias, etc)

En teoría, se han desarrollado muchos algoritmos que explican el comportamiento dinámico de un manipulador o robot, como las formulaciones de Lagrange-Euler y Newton-Euler. Estas fueron desarrolladas antes del primer robot industrial. Con el avance tan rápido de la tecnología, los algoritmos dinámicos están siendo modificados, pero siempre sobre la misma base: hacer que los diseños y sistemas de control de los robots sean más eficientes. La forma en que estos algoritmos teóricos se han descrito, con mucha simbología y representación matricial, los hacen dispendiosos para trabajar manualmente; por esto, se han hecho reducciones de los modelos, linealizándolos alrededor de un punto de trabajo específico. De esta forma se han implementado modelos que facilitan la aplicación de estos algoritmos, los cuales generan resultados más inmediatos, obteniéndolos de un modo más fácil y rápido.

En los últimos años la robótica ha fusionado la mecánica clásica con la teoría de control. El rápido avance de las aplicaciones industriales ha hecho que los desarrollos teóricos y prácticos hayan tenido algunas discrepancias respecto a los resultados de uno y otro.

Recientemente, debido a las necesidades de mejorar los algoritmos de control y los manipuladores, la investigación ha integrado más estas dos disciplinas. A su vez los robots hacen que la demanda de métodos teóricos aumente.

Los primeros trabajos acerca de la dinámica de mecanismos espaciales fueron publicados en 1937, época en la cual los computadores no estaban disponibles para esos análisis.

Los métodos dinámicos llevan a dos tipos de soluciones según se resuelven mediante dinámica inversa o mediante dinámica directa. La dinámica inversa consiste en obtener las fuerzas y pares necesarios para un movimiento prescrito y la dinámica directa radica en calcular las velocidades y aceleraciones dadas las condiciones de carga. [6]

La aparición de los métodos computacionales para resolver los modelos dinámicos de manipuladores represento un avance en la teoría de los robots. Los algoritmos se basan en la mecánica clásica y se han desarrollado de tal forma que su implementación computacional resulta relativamente sencilla.

El modelo dinámico de un robot se puede obtener a partir de las leyes físicas conocidas como las leyes de la mecánica newtoniana y lagragiana. Esto conduce al desarrollo de las ecuaciones de movimiento dinámico para las diversas articulaciones del manipulador, en términos de los parámetros geométricos e inerciales de los elementos. Métodos convencionales como las formulaciones de Lagrange-Euler y Newton-Euler se pueden aplicar, entonces, sistemáticamente para desarrollar las ecuaciones de movimiento del robot.

Otro método de poco coste computacional para resolver problemas dinámicos de multi-cuerpo, pero con muchas limitaciones, es el método de Featherstone (Fearherstone 1987).[7][8][9][10][11]

Este método se lleva a cabo mediante coordenadas relativas empleando las aceleraciones como variables primarias, de manera que el sistema no lineal de ecuaciones planteado por el integrador se resuelve mediante iteración de punto fijo. En cada paso de la iteración se precisan las aceleraciones, que se obtienen de resolver las ecuaciones de la dinámica. El método es relativamente simple para cadenas abiertas, pero se torna enormemente complicado y difícil de generalizar cuando aparecen cadenas cerradas.

Capítulo II

2. PASIBOT

2.1. ¿Qué es un robot?

No es una pregunta tan sencilla como aparenta. De hecho, a lo largo de la historia de la ciencia y de la ciencia ficción esta palabra ha ido adquiriendo distintos significados.

Según la Real Academia Española se define **robot** como *“máquina o ingenio electrónico programable, capaz de manipular objetos y realizar operaciones antes reservadas sólo a las personas”*

Otra definición aceptada de un **robot** es: *“una entidad hecha por el hombre con un cuerpo (anatomía) y una conexión de retroalimentación inteligente entre el sentido y la acción directa sin el control humano”*.

Pero esta definición se está quedando anticuada ya que se ha avanzado mucho en el campo de los robots con inteligencia alámbrica. Las acciones de este tipo de robots son generalmente llevadas a cabo por motores o actuadores que mueven extremidades o impulsan al robot.

Asimismo, la palabra **robot** ha sido utilizada como *“un término general que define a una máquina mecánica o autómatas, que imita a un animal, ya sea real o imaginario, pero se ha venido aplicando a muchas máquinas que reemplazan directamente a un humano o animal en el trabajo o el juego”*.

Esta definición podría implicar que un **robot** es una forma de *“biomimetismo”*

2.2. Robótica y su historia.

La robótica es una rama de la tecnología, que estudia el diseño y construcción de máquinas capaces de desempeñar tareas repetitivas, tareas en las que se necesita una alta precisión, tareas peligrosas para el ser humano o tareas irrealizables sin intervención de una máquina. Las ciencias y tecnologías de las que deriva podrían ser: el álgebra, los autómatas programables, las máquinas de estados, la mecánica, la electrónica y la informática



Figura 6: Robot fabricado por Toyota.

La idea de gente artificial viene desde, al menos tan atrás como la leyenda de Cadmo, quien sembró dientes de dragón que se convertían en soldados, y el mito de Pigmalión, cuya estatua de Galatea cobró vida. En la mitología clásica, el deformado dios de los herreros (Vulcano) creó sirvientes mecánicos, que iban desde inteligentes, hechos a mano en oro, hasta mesas utilitarias de tres patas que se podían mover por sí mismas. Una leyenda hebrea cuenta acerca del Golem, una estatua animada por la magia cabalística. En el lejano norte de Canadá y en las leyendas de los Inuit se habla del Tupilaq, el cual puede ser creado por un mago para cazar y asesinar a un enemigo.

La palabra "robot" viene del vocablo checo robota, "servidumbre", "trabajo forzado" o "esclavitud", especialmente los llamados "trabajadores alquilados" que vivieron en el Imperio Austrohúngaro hasta 1848.

El término fue utilizado por primera vez por Karel Čapek en su obra teatral R.U.R. (Rossum's Universal Robots) escrita en colaboración con su hermano Josef en 1920, interpretada por primera vez en 1921; interpretada en Nueva York en 1922. Aunque los robots de Čapek eran humanos artificiales orgánicos, la palabra robot es casi siempre utilizada para referirse a humanos mecánicos.

El término androide puede referirse a cualquiera de estos, mientras que un cyborg ("organismo cibernético" u "hombre biónico") puede ser una criatura que es la combinación de partes orgánicas y mecánicas.

Cuando la obra de Capek "R.U.R." introdujo el concepto de la fabricación en línea ejecutada por robots quienes trataban de construir más robots, el tema tomaba un tono económico y filosófico. Esta idea ha interesado cada vez más a los seres humanos, y aún sigue vigente representándola en cines en películas como: Metrópolis, y las populares Blade Runner (1982), Terminator (1984) o The Matrix (1999).

En el principio del siglo XVIII, Jacques de Vaucanson creó un androide que tocaba la flauta, así como un pato mecánico que continuamente comía y defecaba. En uno de los cuentos de Hoffmann de 1817, El Coco, presenta una mujer que parecía una muñeca mecánica, y en la obra de Edward S. Ellis de 1865 El Hombre de Vapor de las Praderas se expresa la fascinación americana por la industrialización.

Hacia 1942, Isaac Asimov da una versión más humanizada a través de su conocida serie de relatos, en los que introduce por primera vez el término robótica con el sentido de “disciplina científica encargada de construir y programar robots”. Además, este autor plantea que las acciones que desarrolla un robot deben ser dirigidas por una serie de reglas morales, llamadas las Tres leyes de la robótica (más adelante se analizan en profundidad).[12]

Por otra parte, desde la generalización del uso de la tecnología en procesos de producción con la Revolución Industrial, se intentó la construcción de dispositivos automáticos que ayudasen o sustituyesen al hombre. Entre ellos destacaron los Jaquemarts, muñecos de dos o más posiciones que golpean campanas accionados por mecanismos de relojería china y japonesa.

Robots equipados con una sola rueda fueron utilizados para llevar a cabo investigaciones sobre conducta, navegación y planificación de ruta. Cuando estuvieron listos para intentar nuevamente la construcción de robots caminantes, comenzaron con pequeños hexápodos y otros tipos de robots de múltiples patas. Estos robots imitaban insectos y artrópodos en funciones y forma. Como se ha hecho notar anteriormente, la tendencia se dirige hacia ese tipo de cuerpos que ofrecen gran flexibilidad y probada adaptabilidad a cualquier ambiente. Con más de 4 piernas, estos robots son estáticamente estables lo que hace que el trabajar con ellos sea más sencillo. Sólo recientemente se han hecho progresos hacia los robots con locomoción bípeda.

En 2002 Honda y Sony, comenzaron a vender comercialmente robots humanoides como “mascotas”. Los robots con forma de perro o de serpiente se

encuentran, sin embargo, en una fase de producción muy amplia, el ejemplo más notorio ha sido Aibo de Sony (Figura 8) y ASIMO de Honda (Figura 7).[13][14]



Figura 7: Aibo de Sony



Figura 8: ASIMO de Honda



Es imposible realizar un estado del arte sobre un “robot” sin hacer un inciso sobre las “tres leyes de la robótica” de Isaac Asimov (Figura 9). [12]

Figura 9: Isaac Asimov

En ciencia ficción las tres leyes de la robótica son un conjunto de normas escritas por Isaac Asimov. Las leyes son "formulaciones matemáticas impresas en los senderos positrónicos del cerebro" de los robots. Aparecidas por primera

vez en el libro "Runaround" (1942), establecen lo siguiente:

1ª) Un robot no debe dañar a un ser humano o, por su inacción, dejar que un ser humano sufra daño.

2ª) Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto si estas órdenes entran en conflicto con la Primera Ley.

3ª) Un robot debe proteger su propia existencia, hasta donde esta protección no entre en conflicto con la Primera o la Segunda Ley.

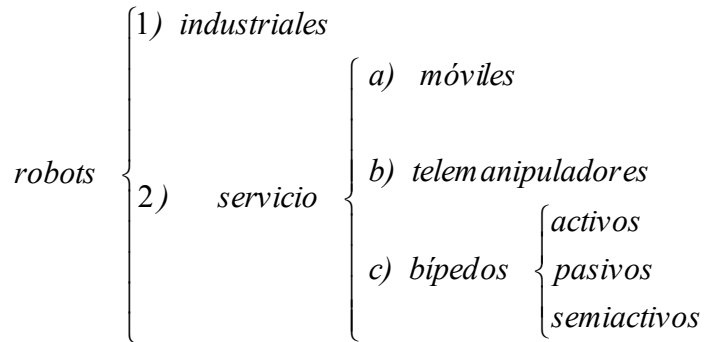
Asimov atribuye las tres Leyes a John W. Campbell, que las habría redactado durante una conversación sostenida el 23 de diciembre de 1940. Sin embargo, Campbell sostiene que Asimov ya las tenía pensadas, y que simplemente las expresaron entre los dos de una manera más formal.

La función de estas leyes es una medida de protección para los seres humanos. Según el propio Asimov, la concepción de las leyes de la robótica quería contrarrestar un supuesto "complejo de Frankenstein", es decir, un temor que el ser humano desarrollaría frente a unas máquinas que hipotéticamente pudieran rebelarse y alzarse contra sus creadores. Las tres leyes de la robótica representan la ética del robot. Un robot debe respetarlas y va a actuar siempre bajo los imperativos de sus tres leyes. Para todos los efectos, un robot se comportará como un "humano" moralmente correcto. Hay una cuarta ley: En uno de los grandes libros de Isaac Asimov : "yo, robot", en el cual los robots se someten a situaciones donde las "tres leyes de la robótica" crean conflictos, se formula una ley más: llamada ley cero de la robótica como corolario filosófico de la primera:

4ª) Un robot no puede hacer daño a la Humanidad o, por inacción, permitir que la Humanidad sufra daño.

2.3. Tipos de robots

Los robots pueden ser clasificados de muchas formas, pero los dos grandes grupos en los que se pueden englobar todos los robots son: los robots industriales y los robots de servicio. Por ello, se detalla a continuación una definición y las características más generales de cada grupo:



1) Robots industriales

Un robot industrial es un dispositivo de maniobra destinado a ser utilizado en la industria y dotado de uno o varios brazos (dependiendo de la función para la que ha sido creado), fácilmente programable para cumplir operaciones diversas con varios grados de libertad y destinado a sustituir la actividad física del hombre en las tareas repetitivas, monótonas, desagradables o peligrosas

La definición más comúnmente aceptada posiblemente sea la de la “*Asociación de Industrias Robóticas (RIA)*”, según la cual un robot industrial es:

- *Un manipulador multifuncional reprogramable, capaz de mover materias, piezas, herramientas, o dispositivos especiales, según trayectorias variables, programadas para realizar tareas diversas.*

La definición de la *RIA*, ha sido modificada ligeramente para poder ser aceptada por la “*Organización Internacional de Estándares (ISO)*”, que define al robot industrial como:

- *Manipulador multifuncional reprogramable con varios grados de libertad, capaz de manipular materias, piezas, herramientas o dispositivos especiales según trayectorias variables programadas para realizar tareas diversas.*

La definición de la *ISO*, a diferencia de la definición de la *RIA*, incluye la necesidad de que el robot tenga varios grados de libertad.

Una característica en común que tienen todas las definiciones es la aceptación del robot industrial como un brazo mecánico con capacidad de manipulación y que incorpora un control más o menos complejo.

Un sistema robotizado, en cambio, es un concepto más amplio. Engloba todos aquellos dispositivos que realizan tareas de forma automática en sustitución de un ser humano y que pueden incorporar o no uno o varios robots, siendo esto último lo más frecuente.

2) Robots de servicio

Se entiende por robots de servicio a unos dispositivos electromecánicos móviles o estacionarios, dotados normalmente de uno o varios brazos mecánicos independientes, controlados por un programa de ordenador y que no realizan tareas industriales sino tareas de servicio [15].

En esta definición tienen cabida, entre otros, los robots dedicados a cuidados médicos, educación, domésticos, de uso en oficinas, intervención en ambientes peligrosos, aplicaciones espaciales, aplicaciones submarinas y agricultura. Sin embargo, esta definición excluye a los telemanipuladores (Figura 11), ya que éstos están controlados directamente por el operador humano y no por un programa de ordenador [16].

a) Móviles:

Son robots con grandes capacidades de desplazamiento, basadas en carros o plataformas y dotados de un sistema locomotor de tipo rodante. Siguen su camino por telemando o guiándose por la información recibida de su entorno a través de sus sensores.

Estos robots se guían mediante pistas materializadas a través de la radiación electromagnética de circuitos empotrados en el suelo, o a través de bandas detectadas fotoeléctricamente. Pueden incluso llegar a sortear obstáculos y están dotados de un nivel relativamente elevado de inteligencia. Dentro de esta definición se podrían englobar los ugv (unmanned ground vehicle), vehículos terrestres no tripulados (Figura 10).



Figura 10: Robot UGV de desactivación de artefactos

b) Bípedos:

Son robots que disponen de dos piernas para desplazarse. Éstos se pueden clasificar en:

Activos:

Se sirven de motores o actuadores para realizar el movimiento y el control.

Pasivos:

Se sirven de su propio peso e inercia para realizar el movimiento y el control.

Semiactivos:

Combinan características de movimiento y control de los dos tipos anteriores. En este grupo se podría ubicar el PASIBOT.

c) Telemanipuladores:

Los robots telemanipuladores (Figura 11) son dispositivos robóticos con brazos manipuladores, sensores y cierto grado de movilidad, controlados remotamente por un operador humano de manera directa o a través de un ordenador.



Figura 11: Telemanipulador

2.4. Historia de los robots bípedos

El gran interés que suscitan los robots bípedos ha motivado la realización de los estudios que constituyen el objetivo de esta tesis. A continuación se expone un estudio cronológico de estos robots bípedos en el que se pone de manifiesto la rápida e interesante evolución de estos mecanismos, que los ha llevado hasta los perfeccionados robots actuales. Este estudio se ha dividido en dos grandes grupos diferenciados, por un lado robots bípedos pasivos y por otro lado los robots bípedos activos. [16] Debido a los intereses de esta tesis, solo se mostrarán los avances referentes a los robots pasivos:

Los robots dinámicos pasivos fueron estudiados e inicialmente desarrollados por Tad McGeer entre 1988 y 1992. Estos mecanismos estaban inspirados en unos cálculos muy simples realizados una década antes por Tom McMahon en la Universidad de Harvard, que a su vez se basó en un juguete de los años 30, probablemente un “Wilson Walkie” (Figura 12), hecho de madera y tela: [17]

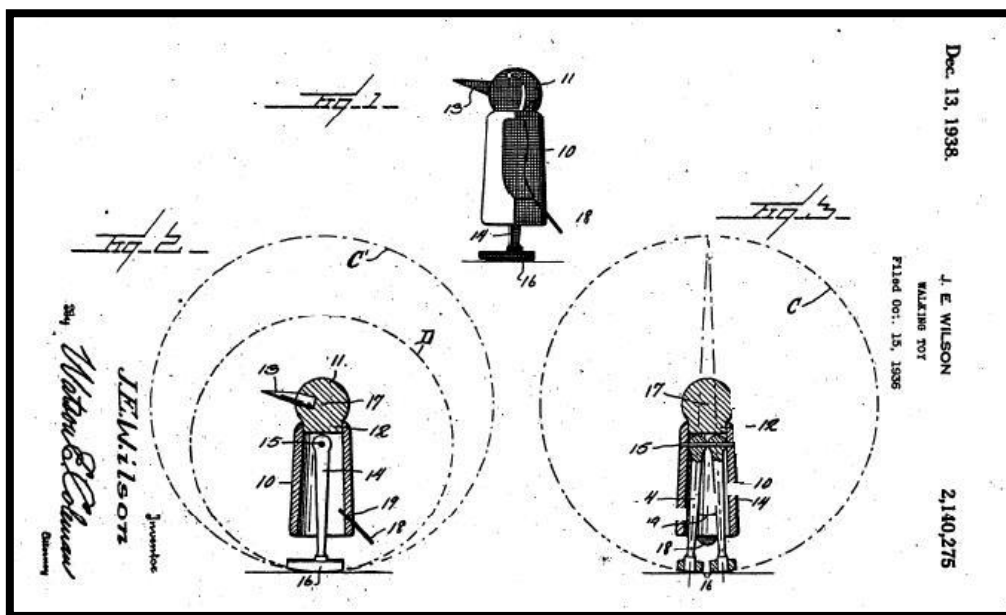


Figura 12: Plano original de la patente de Wilson Walkie.

Wilson Walkie es un juguete denominado “Pingüino caminante en rampa”, patentado por John E. Wilson el 13 de diciembre de 1938 y fabricado por la empresa “Walter Toys” de Watertown (EEUU). Está fabricado con una altura de 11,43 centímetros.

A continuación, en la Figura 12, puede observarse el plano que Wilson presentó en la Oficina de Patentes de Estados Unidos para dejar constancia de su diseño.



El movimiento de Wilson Walkie se debía a que sus piernas giraban dentro de un cono de tal forma que cuando el juguete se colocaba en una rampa inclinada podía caminar sin necesidad de usar ningún actuador. Tad McGeer es un ingeniero aeronáutico que hace varios años tuvo una excelente idea. Para desarrollarla, McGeer fundó el grupo *Insitu* donde se dedicó a producir naves robóticas en miniatura. La idea principal era desarrollar aparatos que no utilizaran mucha energía al moverse [18].

Figura 13: Juguete “Wilson Walkie”. de la década de los 30 del siglo XX

“Las primeras pruebas las hicimos con pequeñas máquinas que bajaban por una rampa sólo con la ayuda de la gravedad”. Esta máquina es el primer robot bípedo pasivo de la historia que partió del juguete Wilson Walkie.

“Desde ahí fuimos agregando más dinamismo y menos motores, así hemos cortado la energía utilizada”, expresó Steven Collins, ingeniero mecánico de la Universidad de Michigan y que colaboró con McGeer.

Los investigadores piensan que estos trabajos ayudarán en el entendimiento sobre la locomoción animal y la biomecánica de las piernas y los pies. “Esto nos ayudará a construir prótesis mucho más eficientes y que tomen menos esfuerzo para utilizar”, concluyó el investigador Collins.

Una vez que Tad McGeer creó el primer robot bípedo pasivo de la historia, se han realizado pocos avances. En concreto, cinco son los robots bípedos pasivos que destacaron en la historia a partir del de McGeer.

El primero de ellos fue el modelo que Martin Wisse realizó en la Universidad de Cornell en el año 1998. Éste fue desarrollando y evolucionando el robot bípedo pasivo de McGeer con la ayuda de Andy Ruina. Construyendo finalmente un andador pasivo dinámico 3D con rodillas, basados en simulaciones en 2D. A continuación se puede observar la figura con dicha evolución.

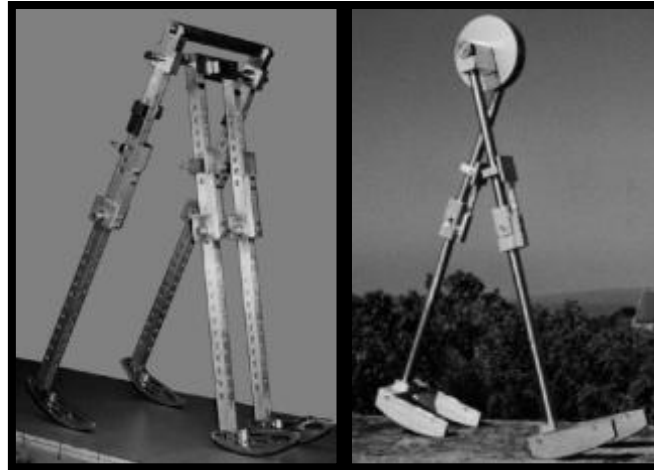


Figura 14: Evolución del robot bípedo pasivo de McGeer al robot de Wisse y Ruina.

En febrero del 2005 en la reunión anual de la “*Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (AAAS)*”, tres equipos de investigación de las universidades de *Cornell*, *MIT* y *Delft (Holanda)* lograron construir robots cuyos pasos y movimiento se parecen a la forma de andar de los humanos .

- Robot Ranger (Universidad de Cornell, Holanda).
- Robot Toddlers (Universidad de MIT, Holanda).
- Robot Denise (Universidad de Delft, Holanda).

A continuación se comentan ciertas características de cada uno de los robots pasivos citados anteriormente:

- Robot Ranger (Universidad de Cornell).

El robot bípedo llamado Ranger de la Universidad de Cornell mide un metro, tiene dos patas largas con articulaciones (caderas, rodillas y tobillos) dos brazos, una barra corta en lugar de torso y una caja plana por cabeza, donde va un pequeño microcontrolador y un par de baterías a cada lado. Los dos ojos protuberantes son dos cascarones de plástico: "Pura decoración", dice Andy Ruina, uno de los padres del engendro, cuyo interés reside en que imita mecánicamente muy bien el caminar humano, explotando eficazmente el equilibrio y la dinámica del balanceo natural, de manera que precisa muy poca energía para desplazarse. Ruina lo puso a andar en la pista cubierta de atletismo del campus de Cornell, dispuesto a batir un récord mundial.



Figura 15: Robot de la Universidad de Cornell.

Resulta estrafalario y se balancea como una persona con muletas, pero no se cae: anduvo un kilómetro en círculos por la pista. Un logro sin precedentes. Sus pies "sienten" el suelo. "No es muy inteligente", reconoce Ruina. Eso es lo extraordinario.

Destacar que él sólo es capaz de caminar hacia delante y pesa 11,804 kilogramos.

Ruina, Collins junto con Russ Tedrake (del Instituto de Tecnología de Massachusetts), presentaron sus robots rodeados de juguetes andarines como pingüinos, elefantes o monigotes de madera que se desplazan sobre rampas. Los juguetes eran importantes para explicar su trabajo: los robots que caminan sin pilas han existido desde hace mucho tiempo, pero sólo lo hacen en una superficie descendente, aprovechando el efecto de la gravedad. Sin embargo, cuando se quiere que un robot ande en un plano horizontal hay que proporcionarle una fuente de energía (baterías, red eléctrica o simplemente darle cuerda).

- Robot Toddlers (Universidad de MIT).

Los robots de MIT son conocidos como los "Toddlers", pesan unos 2,27 kilogramos y miden 43 centímetros de alto. Son los más sofisticados ya que pueden caminar en varias direcciones. El robot desarrollado por el MIT también demuestra un sistema de aprendizaje nuevo, que permite que el robot se adapte de forma continua al terreno sobre el que se mueve. Estos nuevos avances en robótica podrían transformar los actuales sistemas de diseño y control de robots, y podrían ser aplicados al desarrollo de prótesis robóticas.

El robot del MIT utiliza un programa de aprendizaje que aprovecha dicho diseño y permite que el robot aprenda por sí mismo a andar en menos de 20 minutos. Precisamente su apodo, "Toddlers" (el término inglés para un niño pequeño que empieza a andar) se deriva de su capacidad de aprender a andar y la forma en que lo hace.



Figura 16: Robot Toddlers.

Este modelo de robot es uno de los primeros robots en utilizar un programa de aprendizaje y es el primero en andar sin tener información previamente implantada en sus controles. Además el sistema de aprendizaje permite que el robot se mueva con eficacia por una variedad de superficies y, en el futuro, podría permitir que se mueva por terreno muy rocoso. Esto se debe a que el programa funciona con tanta velocidad que el robot puede adaptarse de forma continua al tipo de terreno.

- Robot Denise (Universidad de Delft).

El robot de la Universidad Delft (Holanda) llamado Denise (Figura 17), tiene 7,264 kilogramos de peso y 1,5 metros de largo. Sólo camina hacia delante. La programación de los robots de Cornell y Delft es muy sencilla, porque gran parte del problema de los controles se soluciona a través del diseño mecánico del robot.



Figura 17: Robot Denise.

Por último se debe comentar uno más, además de los tres robots pasivos comentados. En junio del 2005 el Instituto Tecnológico de Nagoya (Figura 18) creó un robot capaz de recorrer 4000 pasos en 35 minutos sin parar sobre una cinta transportadora. Sus creadores son Yoshito Ikemata, Akihito Sano y Hideo Fujimoto [19].



Figura 18: Robot Nagoya (2005).

Destacar también el SOLAR ROBOT diseñado por 4M: Figura 19. Este bípedo activado por energía solar fue ganador de los premios: Toy Fair Best New Creative Toys de 2011 y Best Green Product 2012 & 2013 (USA)



Figura 19: solar robot

2.5. Descripción del PASIBOT

En este capítulo se realizara una descripción del robot PASIBOT. En la Figura 20 se muestra el bípodo.



Figura 20: primer prototipo construido por el grupo de investigación MaqLab.

En la siguiente ilustración, Figura 21, se muestra la nomenclatura de los eslabones del PASIBOT utilizada en esta tesis. [20][21]

Para describir el funcionamiento del mecanismo del PASIBOT se va a descomponer en tres partes principales, las cuales serán llamadas:

- 1) CHEBYSHOV
- 2) EXTENSION
- 3) ESTABILIZACIÓN

Con el mecanismo de Chebyshev (Figura 22) convertimos un movimiento circular de un motor en un movimiento con un tramo recto y otro curvo; en la fase de extensión, usando un pantógrafo, aumentamos de tamaño ese movimiento; y en la fase de estabilización, con una corredera y una disposición de eslabones en paralelogramo se asegura que el giro del eslabón “cadera” sea despreciable respecto a la superficie del suelo. A continuación se explicará el funcionamiento de cada parte:

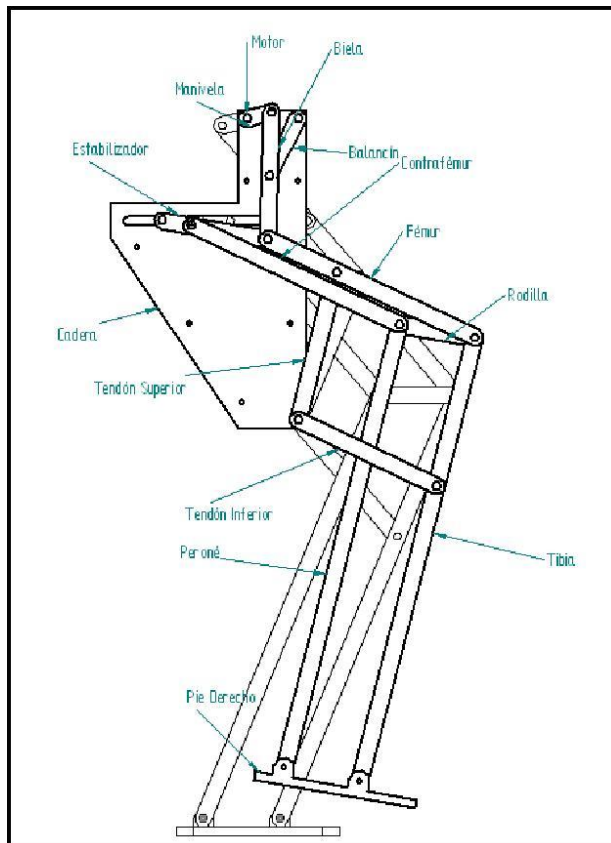


Figura 21: Nomenclatura de los eslabones del PASIBOT

1) CHEBYSHOV

Esta parte del PASIBOT es básicamente un mecanismo articulado de cuatro barras, esto quiere decir que transfiere el movimiento de rotación pura de la manivela a un movimiento compuesto de la biela (o viceversa). El mecanismo en concreto es el que se muestra en la Figura 22:

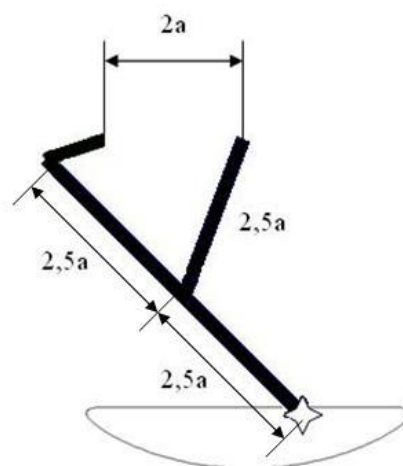
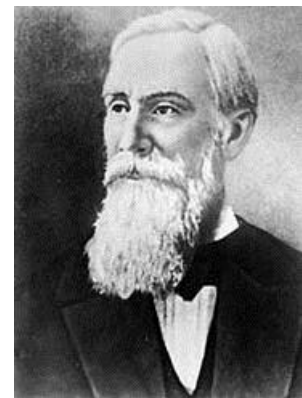


Figura 22: mecanismo de Chebyshev.

Este es el mecanismo principal del robot: con las dimensiones que se muestran en la Figura 22 se logra convertir el movimiento circular de la manivela 8 (accionada por el motor) en un movimiento en el extremo de la biela que realiza la mitad de su periodo de forma casi recta y la otra mitad describe un movimiento curvo. La parte del movimiento que es recta será cuando un pie esté apoyado de forma total (toda su superficie en contacto con el suelo) mientras el pie inverso está en el movimiento elíptico el cual lo desplazará hacia delante para terminar con el pie totalmente apoyado y dispuesto a ser ahora él quien soporte el peso en contacto con el suelo.

Figura 23: Pafnuti Lvóvich Chebyshev (Пафнутий Львович Чебышёв)

(26 de mayo de 1821-8 de diciembre de 1894) fue un matemático ruso. Su nombre se translitera también como Tchebychev, Tchebycheff, Tschebyscheff o Čebišev.



2) EXTENSION

Este segundo sub-mecanismo consiste en un Pantógrafo (Figura 24). Un pantógrafo (del Griego παντ, todo, y γραφ, dibujo, imagen) es un mecanismo articulado basado en las propiedades de los paralelogramos con un punto fijo (pivote).



Figura 24: Antiguo pantógrafo de dibujo.

Su teoría se describe en los principios de Descartes sobre los paralelogramos y fue ideado en 1603 por el sacerdote jesuita germano Christopher Scheiner; tiene

aplicaciones en diversos campos de la mecánica o el dibujo, en mecanismos tales como el pantógrafo de ferrocarril, el gato hidráulico, el pantógrafo de oxicorte, o como instrumento de dibujo.

El pantógrafo, como instrumento de dibujo, permite copiar una figura o reproducirla a una escala distinta. Para conseguir dibujos a diferente escala se varía la distancia entre los puntos de articulación (rótulas), conservando siempre la condición de paralelismo entre las varillas, dos a dos (Figura 25).

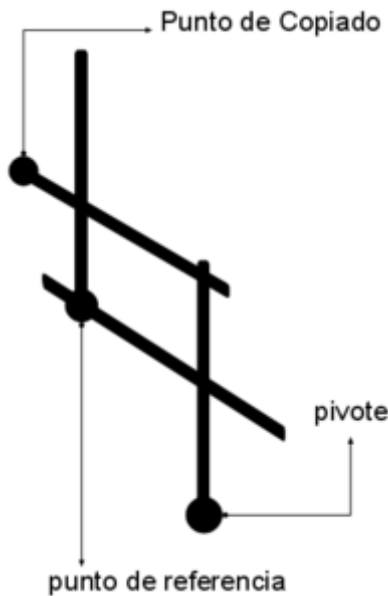


Figura 25: Pantógrafo de dibujo.

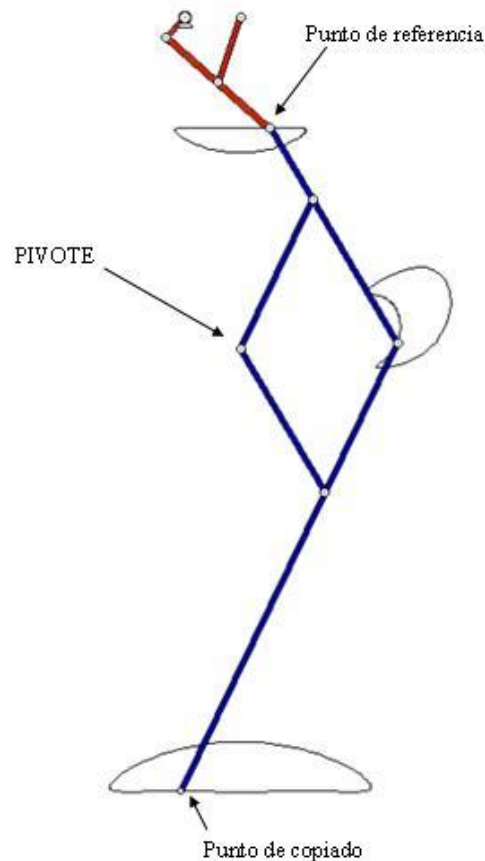


Figura 26: Chebyshev y Pantógrafo juntos.

Con este pantógrafo (Figura 24) se logra aumentar e invertir el movimiento que generaba el extremo de la biela del mecanismo de Chebyshev. En la Figura 26 se aprecia claramente como el movimiento recto-curvo del “punto de referencia” del mecanismo de Chebyshev (en rojo) es invertido y aumentado al “punto de copiado” gracias al pantógrafo (en azul); el “pivote” es el punto fijo del pantógrafo.

3) ESTABILIZACIÓN

Se ha analizado este primer movimiento, que como se puede observar en la Figura 26 describe un paso perfectamente; el único problema posterior es que se necesita que el apoyo sea capaz de soportar el PASIBOT sin volcar: estabilización. Para solucionar este problema hay que añadir un “pie” y configurarlo de tal forma que en la parte del periodo que tiene que sostener el PASIBOT se encuentre paralelo a la superficie de apoyo, es decir, no se produzca un giro significativo entre éste y la cadera.

La solución propuesta para el PASIBOT es mediante una corredera fija a la cadera que es la pieza (Figura 27) donde se encuentran fijos los extremos de la manivela y balancín del mecanismo de Chebychov y el punto fijo del pantógrafo.

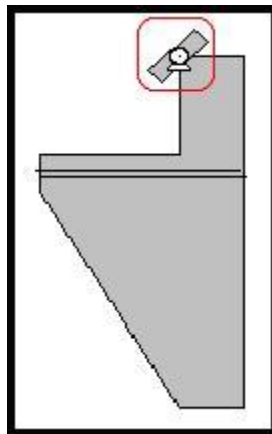


Figura 27: la cadera con la dirección de la corredera y el punto de apoyo de la manivela recuadrado.

Esa corredera está alineada con el tramo recto del extremo de la biela del mecanismo de chebychov y por ella discurre el extremo del eslabón estabilizador. Esto obliga a que el ángulo del estabilizador sea igual en los eslabones que comunican el pantógrafo con el sistema paralelo: el propio estabilizador, la rodilla y el pie. Debido a que la corredera sólo puede moverse en una dirección, la cual es paralela al suelo, los eslabones citados se ven obligados a moverse solo en esa dirección. Con esto se logra que el pie de apoyo esté paralelo al suelo.

En la Figura 28 se puede observar tanto la pierna derecha como izquierda; la pierna izquierda, en azul está apoyada en este tramo, su extremo de la manivela realiza la parte del periodo recta, la cual desplaza el PASIBOT hacia delante.

En la pierna derecha, está representado en rojo el sistema estabilizador, gracias al cual se consigue que el giro relativo entre la cadera y el pie sea insignificante; y en verde el sistema de Chebyshev y pantógrafo juntos. Esta pierna está en el periodo que describe un movimiento elíptico, que será el correspondiente a levantar el pie y desplazarlo hacia delante para dar el paso.[22][23][24][25],[26],[43]

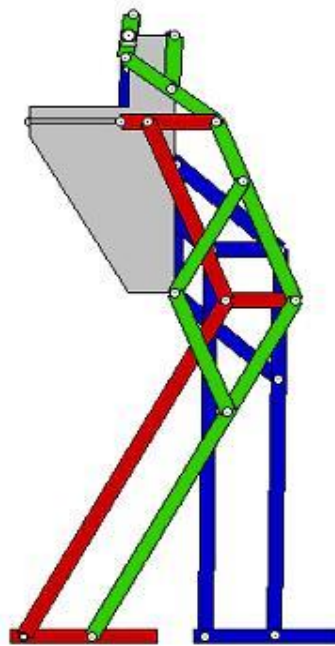


Figura 28: El PASIBOT con las partes diferenciadas.

En la siguiente Figura 29 se representa una secuencia del paso del PASIBOT:

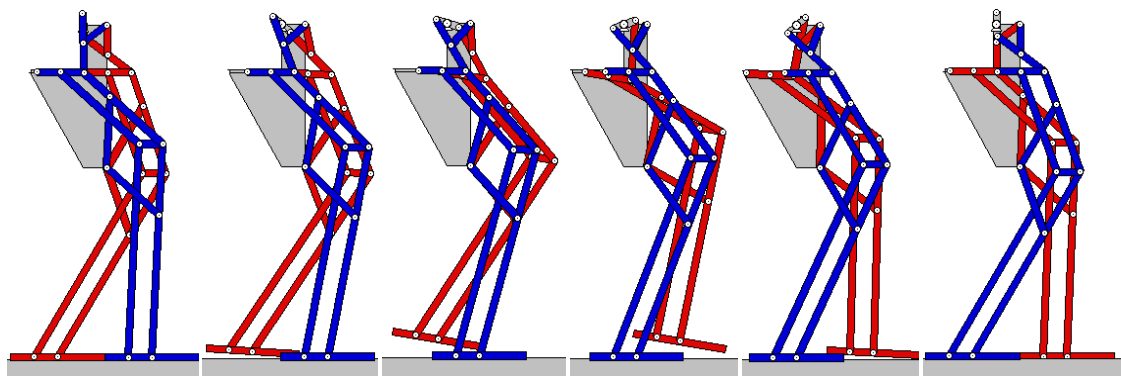


Figura 29: Secuencia del paso del PASIBOT.

Capítulo III

3. Análisis Mecánico Inteligente: Aplicación al PASIBOT

3.1. Metodología propuesta

De nuestra experiencia en estudios cinemáticos y dinámicos realizados en el departamento de ingeniería mecánica de la universidad Carlos III de Madrid hemos propuesto esta metodología de análisis paramétrico. Gracias a ella es posible obtener los resultados deseados para muchos estudios, como análisis de sensibilidad, optimizaciones, favorecer un control más simple, y en definitiva, un estudio que nos ofrezca no solo el análisis deseado, sino la posibilidad poder ver ese análisis de forma “inteligente”. Hemos definido el análisis como “inteligente” ya que para su realización se debe comprender el funcionamiento y editar las ecuaciones, pero gracias a ello, se obtiene los resultados de forma paramétrica y apreciando claramente las dependencias e influencias mecánicas de todas las partes.

Esta metodología consiste en definir primero la nomenclatura y topología. Después hay que elegir el número y tipo de coordenadas, en función del número y tipo de pares cinemáticos, tipo de contactos, tratamiento ideal/no ideal de pares cinemáticos (fricciones, holguras...). Encontrar las relaciones de cierre y las dependencias entre las distintas partes del mecanismo. En este punto, el problema puede abordarse de varias formas, fijando una cinemática y obteniendo la dinámica (dinámica inversa) o fijando las condiciones iniciales y fuerzas aplicadas y obteniendo el movimiento (dinámica directa) o fijando la posición inicial y aplicando un estudio cuasi-estático para obtener las fuerzas necesarias para realizar el movimiento deseado. Llegados a este punto, la metodología permite añadir grados de libertad, como añadir deslizamiento, condiciones de vuelco, variaciones de las partes para análisis de sensibilidad, aplicación de control o iterar el método para optimizar.

Esta metodología se puede observar en la Figura 30 que muestra el organigrama del “análisis mecánico inteligente”. Y es explicada con detalle aplicada al robot bípedo PASIBOT.

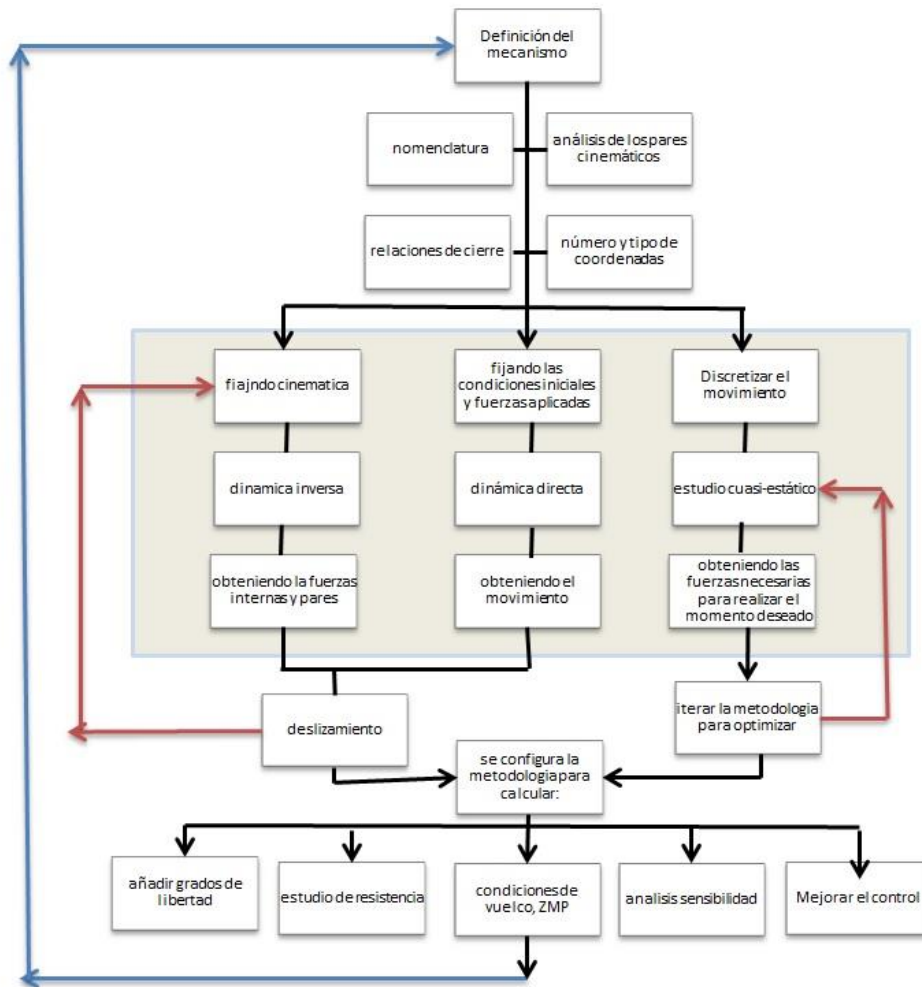


Figura 30: organigrama del “análisis mecánico inteligente”

3.2. Nomenclatura

La tarea primera del organigrama propuesto es definir bien los eslabones, ángulos y puntos de referencia del sistema. En la Figura 31 se puede observar el número de eslabones: 12 por cada pierna además de la manivela motor y la cadera, que conectan ambas piernas. Con lo que se tiene en total 26 eslabones.

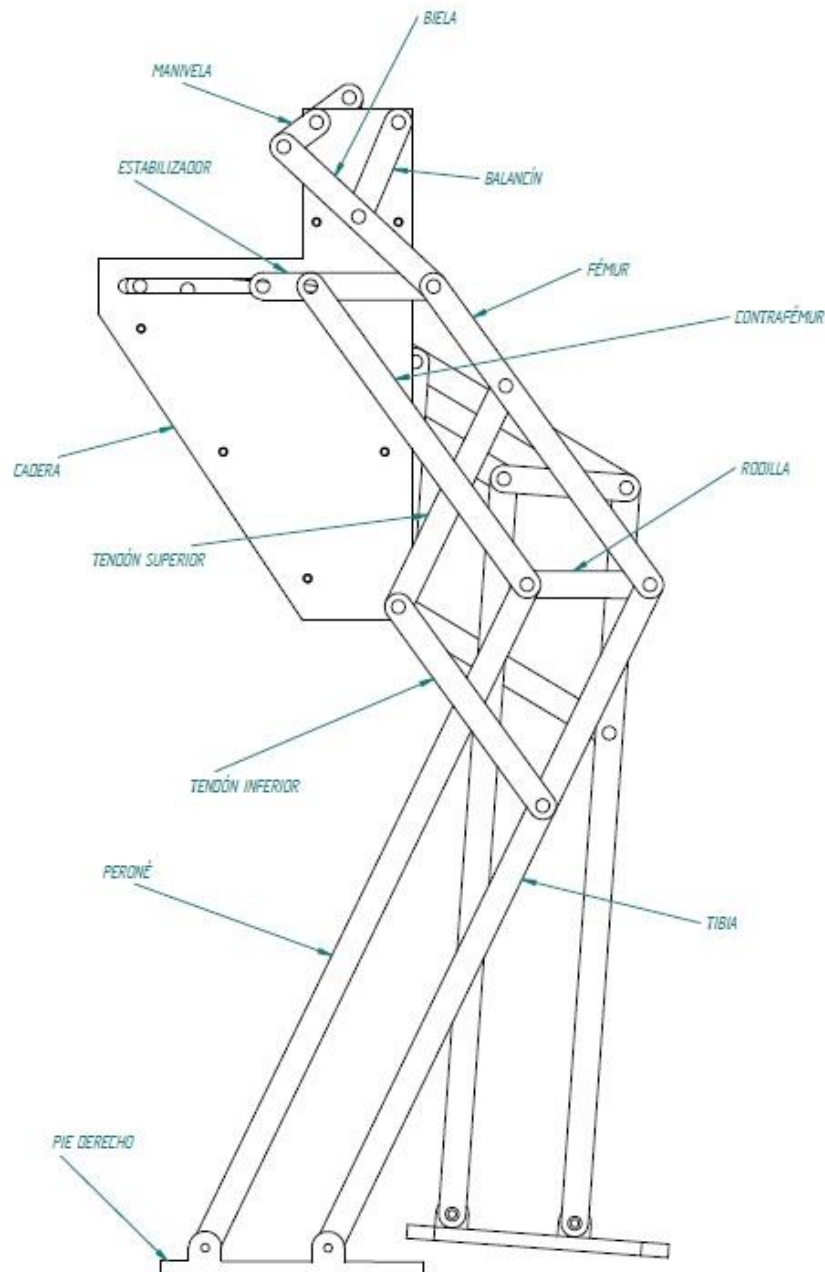


Figura 31: nomenclatura detallada de los eslabones del PASIBOT.

Uno de los pies se encuentra apoyado en el suelo (Figura 31) en el periodo que estudiamos. En la Tabla 1 se define la nomenclatura utilizada para los 14 eslabones diferentes de que consta el bípedo.

Tabla 1: enumeración de los eslabones diferentes del bípedo

Eslabón:	Nombre:
1	pie-suelo
2	tibia
3	fémur
4	tendón inferior
5	rodilla
6	tendón superior
7	biela
8	manivela
9	balancín
10	estabilizador
11	cursor
12	contrafémur
13	peroné
14	cadera

Como se puede ver, todos los eslabones tienen su homónimo idéntico en la otra pierna, salvo el eslabón 8 y el 14, ya que la manivela y cadera son compartidas por ambas piernas.

Las variables utilizadas para la descripción del modelo serán las siguientes, con sus respectivos significados y unidades:

l_i = longitud del eslabón i [mm].

r_{ij} = vector posición de la articulación i - j desde el C.M. del eslabón i [mm].

r_{ijx} = proyección del vector posición en el eje x [mm].

r_{ijy} = proyección del vector posición en el eje y [mm].

ϑ_i = Ángulo del eslabón i con el eje x [rad].

$\dot{\vartheta}_i$ = velocidad angular del eslabón i [rad/s].

$\ddot{\vartheta}_i$ = aceleración angular del eslabón i [rad/s²].

m_i = masa del eslabón i [Kg].

I_i = momento de inercia del eslabón i con respecto al eje perpendicular al plano de giro que pasa por el centro de masas [Kg.mm²].

f_{ij} = fuerza que ejerce el eslabón i sobre el j [N].

3.3. Medidas del PASIBOT

El PASIBOT podría ser construido en todos los tamaños posibles, solo el chebychov tiene que guardar proporciones y también hay que respetar que el tendón sea igual al fémur al contra-fémur y la tibia igual al peroné. Esta tesis se va a centrar principalmente en uno, cuyas dimensiones son las que se han adoptado para construir el primer prototipo. Calcular los resultados con otro tamaño, es tan fácil como cambiar las medidas teniendo en cuenta que las relaciones sean las mismas. Nuestras medidas son:

Tabla 2: con las medidas de los eslabones de la pierna izquierda y derecha:

Eslabón:	Nombre del eslabón:	Longitud: li[mm]	Eslabón:	Nombre del eslabón:	Longitud: li[mm]
1'	pie en el aire	90	1	Pie en el suelo	90
2'	tibia en el aire	540	2	tibia	540
3'	fémur en el aire	270	3	fémur	270
4'	tendón inferior en el aire	180	4	tendón inferior	180
5'	rodilla en el aire	90	5	rodilla	90
6'	tendón superior en el aire	180	6	tendón superior	180
7'	biela en el aire	150	7	biela	150
9'	balancín en el aire	75	9	balancín	75
10'	estabilizador en el aire	125	10	estabilizador	125
11'	cursor en el aire	0	11	cursor	0
12'	contrafémur en el aire	270	12	contrafémur	270
13'	peroné en el aire	540	13	peroné	540

Todos estos eslabones tienen de ancho 20mm y de espesor 8mm. Se puede observar que los eslabones homónimos miden igual. Se tomará como densidad la del aluminio común $\rho = 2.7g/cm^3$. Esta podría ser fácilmente cambiada para futuros análisis.

El momento de inercia del eslabón respecto del eje perpendicular al plano de movimiento que pasa por el centro de masas de cada eslabón será calculado considerándolo como una varilla esbelta: $I_i = \frac{m_i}{12} (ancho^2 + l_i^2)$

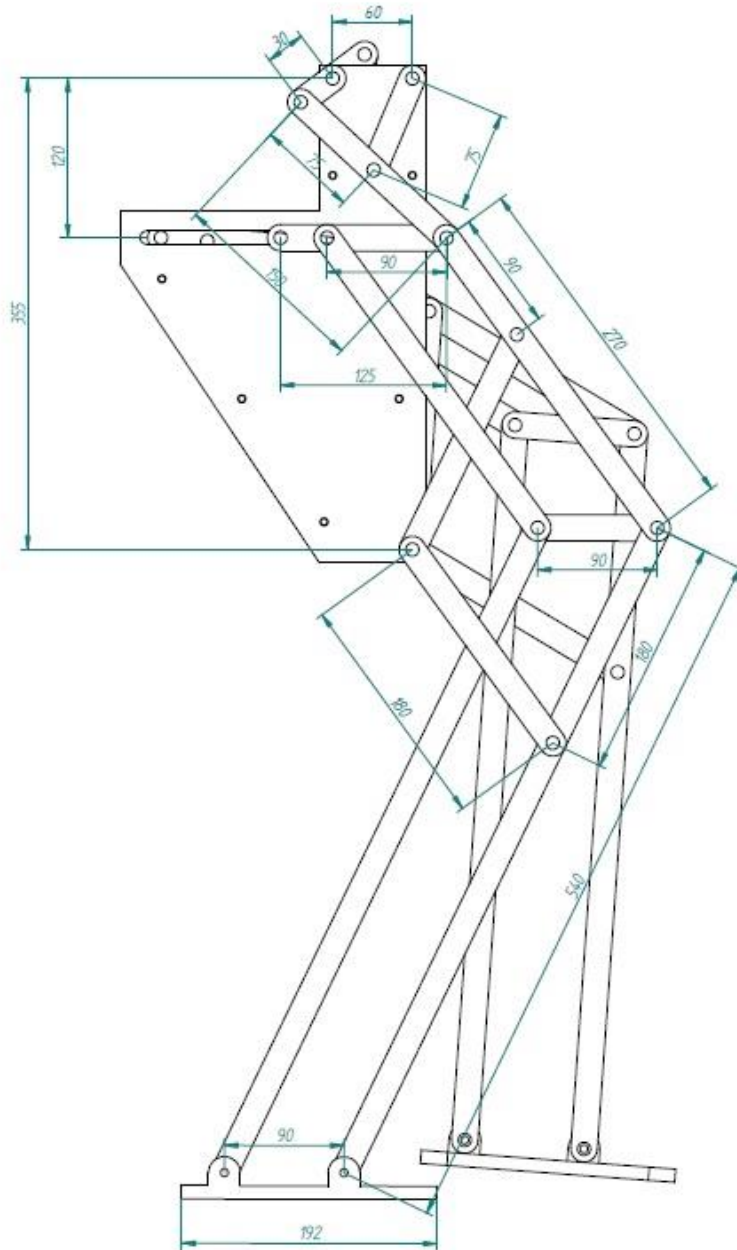


Figura 32: Dimensiones del PASIBOT

En la Figura 32 se muestran las medidas del PASIBOT. Se puede observar que existen dos eslabones que tienen unido otro eslabón en un punto que no es su extremo. Las correspondientes distancias de esos puntos a los centros de masas son: $d_3=45mm$, $d_2=90mm$ y $d_{10}=27,5mm$.

En la Figura 33 se muestran las dimensiones de la Cadera (eslabón 14):

El área de la cadera es $A_{14} = 34350 \text{ mm}^2$

Si se toma como referencia la esquina superior izquierda de la cadera y se calcula el Centro de Masas; se obtiene como resultado: (-1.878, -182.33).

Dividiendo la cadera en tres partes, dos rectángulos y un triángulo, con sus respectivas áreas y centros de masas, calculando los momentos de Inercia de cada uno y con el teorema de Steiner ($I_{eje} = I_{eje\text{-del-C.M.}} + (distancia)^2 \cdot M$) se calcula el momento de Inercia del eslabón 14, la cadera: $I_{14} = \rho(180074025 \text{ mm}^2)$ donde ρ es la densidad.

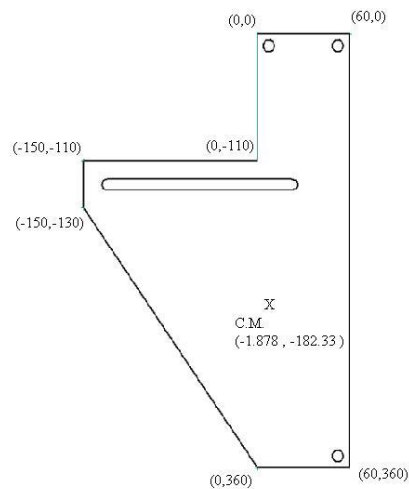


Figura 33: Cadera del PASIBOT en el caso principal con el centro de masas representado.

La masa total del este modelo de PASIBOT es 3,6785 Kg sin contar el peso del motor.

3.4. Cinemática del PASIBOT sin deslizar

Siguiendo el organigrama de la Figura 30, en esta sección se expone el método para resolver la cinemática del PASIBOT en la realización de un paso, con un pie fijo en el suelo.

Las expresiones cinemáticas permitirán obtener de cada eslabón la posición, velocidad y aceleración tanto lineales como angulares respecto al punto de referencia deseado en coordenadas independientes y en función del tiempo.

El eslabón elegido de referencia será la manivela motriz (eslabón 8), el motor, valor que se puede configurar. Primero se obtendrán las posiciones y ángulos de todos los eslabones (x_i, y_i, ϑ_i) en función del tiempo. Derivando una y dos veces se obtendrán las velocidades $(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\vartheta}_i)$ y aceleraciones $(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{\vartheta}_i)$ y con esto se resuelve el análisis cinemático completo.

La posición, velocidad y aceleración tanto angulares como lineales de los eslabones obtenidas serán las entradas al problema dinámico, cuya solución proporcionará el valor de todas las fuerzas entre eslabones, así como el par motor. Es importante destacar que todos los datos obtenidos son en función del tiempo.

El PASIBOT con un pie fijo en el suelo sin deslizar es un mecanismo de un grado de libertad, El problema cinemático se reduce, pues, a expresar la posición angular de cualquier eslabón en función de un solo ángulo. El mecanismo puede dividirse en tres submecanismos cuyas relaciones de cierre proporcionarán la cinemática del submecanismo. Estas son: 1-chebyshev, 2-extensión y 3-estabilizador.

Ahora se realizarán los cálculos necesarios para obtener todas las posiciones y ángulos de los eslabones del PASIBOT. Para calcular los ángulos no hace falta saber las medidas sino la relación entre las dimensiones de los eslabones. Se tomará la mitad del eslabón manivela, como la unidad.

1) CHEBYSHOV

En la Figura 34 se detallan los vectores que determinan las ecuaciones de cierre del subsistema chebyshov con los ángulos y longitudes involucrados. Los ángulos están referidos a la dirección que forman las articulaciones de la manivela motor y del balancín con la cadera, la cual es paralela a la deslizadera sobre la cadera.

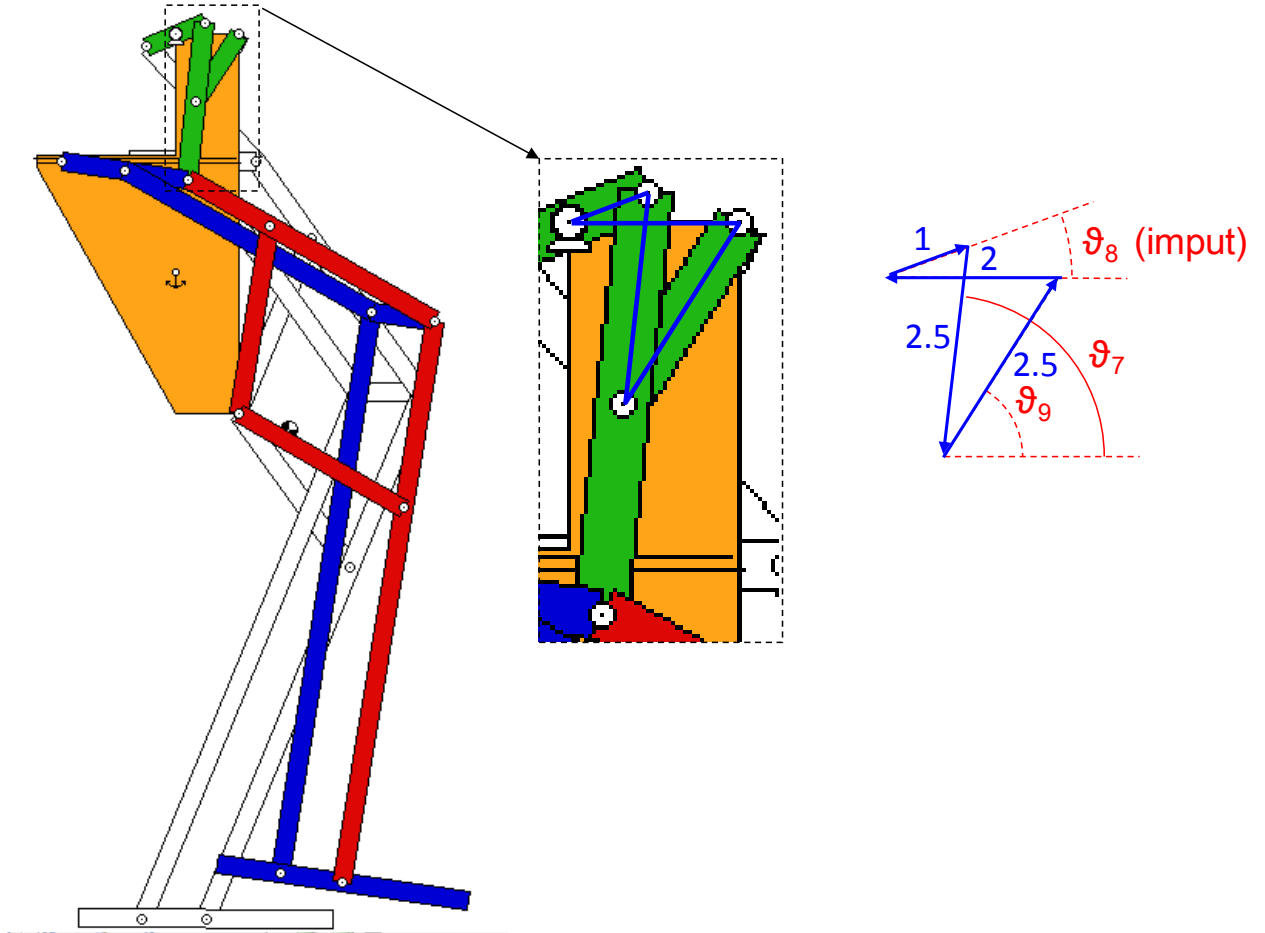


Figura 34: distancias y ángulos del mecanismo de Chebychov

La primera ecuación de cierre liga las coordenadas angulares de los eslabones 7,8 y 9 (biela, manivela y balancín mostrados en verde en la Figura 34), de las que ϑ_8 es conocido. Sabiendo las distancias entre las articulaciones y tomando el ángulo de cada eslabón respecto a la dirección de la deslizadera se pueden plantear estas ecuaciones:

$$\begin{cases} -2.5 \cdot \cos(\theta_7) + 2.5 \cdot \cos(\theta_9) + \cos(\theta_8) - 2 = 0 \\ -2.5 \cdot \sin(\theta_7) + 2.5 \cdot \sin(\theta_9) + \sin(\theta_8) = 0 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es de la forma:

$$\begin{cases} A \cdot \cos(\alpha) + B \cdot \cos(\beta) + C = 0 \\ A \cdot \sin(\alpha) + B \cdot \sin(\beta) + D = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es de la forma:

Ecuación 1

$$\cos(\alpha) = \frac{C \cdot (B^2 - A^2 - C^2 - D^2) + D \sqrt{4 \cdot A^2 \cdot (C^2 + D^2) - (B^2 - A^2 - C^2 - D^2)^2}}{2 \cdot A \cdot (C^2 + D^2)}$$

$$\cos(\beta) = \frac{C(A^2 - B^2 - C^2 - D^2) - D \sqrt{4 \cdot B^2 \cdot (C^2 + D^2) - (A^2 - B^2 - C^2 - D^2)^2}}{2 \cdot B \cdot (C^2 + D^2)}$$

Particularizando para:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \theta_7 & A = 2.5 & C = 2 - \cos(\theta_8) \\ \beta = \theta_9 & B = -2.5 & D = -\sin(\theta_8) \end{array}$$

Se obtiene la solución:

$$\begin{cases} \theta_7 = a \cos\left(\frac{-4 \cdot \cos(\theta_8)^2 + 13 \cdot \cos(\theta_8) - 10 + \sin(\theta_8) \cdot \sqrt{(-16 \cdot (\cos(\theta_8))^2 - 60 \cdot \cos(\theta_8) + 100)}}{25 - 20 \cdot \cos(\theta_8)}\right) \\ \theta_9 = a \cos\left(\frac{-4 \cdot \cos(\theta_8)^2 + 13 \cdot \cos(\theta_8) - 10 - \sin(\theta_8) \cdot \sqrt{-16 \cdot \cos(\theta_8)^2 - 60 \cdot \cos(\theta_8) + 100}}{-25 + 20 \cdot \cos(\theta_8)}\right) \end{cases}$$

2) EXTENSION

En la Figura 35 se muestra la segunda ecuación de cierre, la cual involucra los ángulos ϑ_7 y ϑ_8 ya conocidos y las incógnitas ϑ_2 y ϑ_3 .

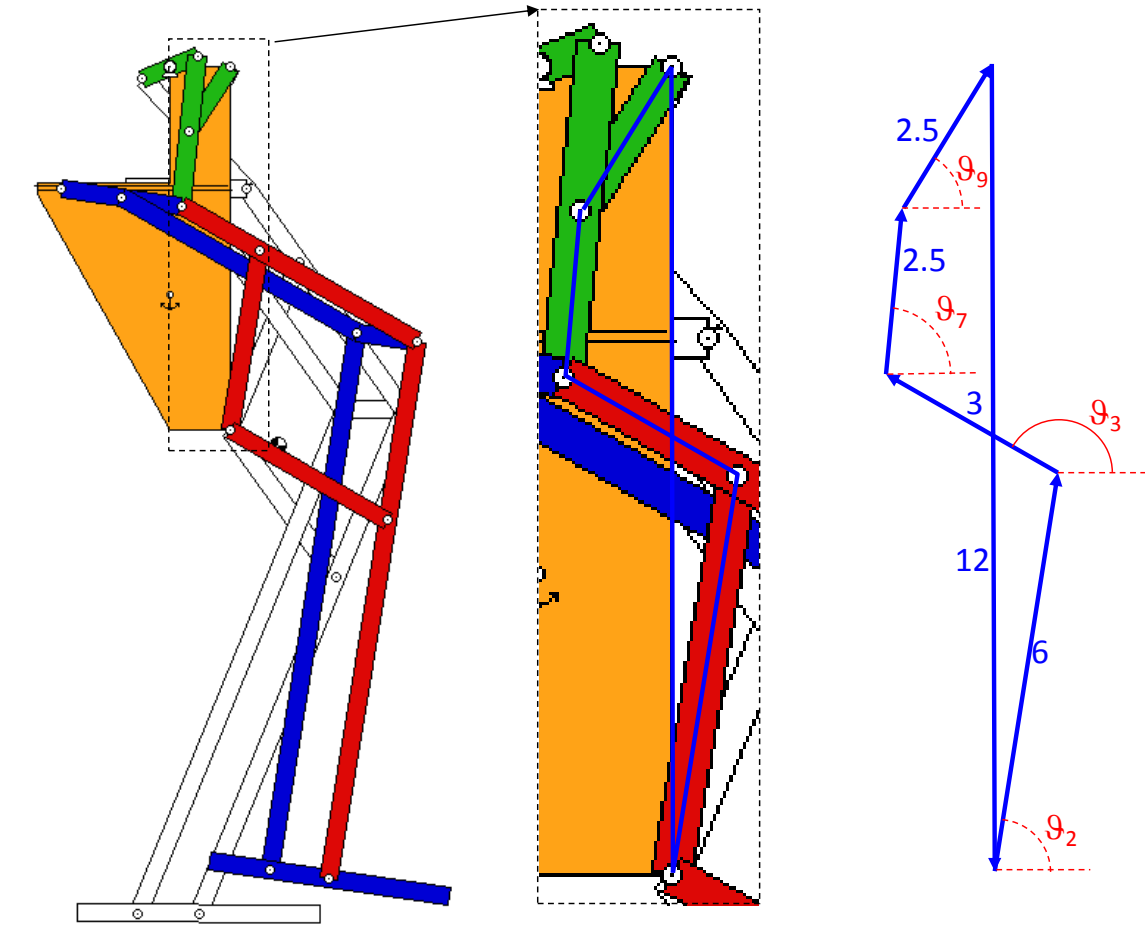


Figura 35: distancias y ángulos del mecanismo de extensión.

Conocidas las distancias y los ángulos de la extensión, Figura 35, se vuelve a plantear la ecuación de cierre:

$$\begin{cases} 6 \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \cos(\theta_3) + 2.5 \cdot \cos(\theta_7) + 2.5 \cdot \cos(\theta_9) = 0 \\ 6 \cdot \sin(\theta_2) + 3 \cdot \sin(\theta_3) + 2.5 \cdot \sin(\theta_7) + 2.5 \cdot \sin(\theta_9) - 12 = 0 \end{cases}$$

que también es de la forma de la ecuación 1, donde los términos serían:

$$\begin{array}{lll} \alpha = \theta_2 & A = 6 & C = 2.5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9)) \\ \beta = \theta_3 & B = 3 & D = 2.5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9)) - 12 \end{array}$$

y la solución es

$$\begin{cases} D^2 + C^2 = (2.5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9)))^2 + (2.5 \cdot \sin(\theta_7) + \sin(\theta_9) - 12)^2 \\ \theta_2 = a \cos\left(\frac{(2.5 \cdot (\cos(\theta_7) + \cos(\theta_9))) \cdot (-27 - (D^2 + C^2)) - (2.5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9) - 12)) \cdot \sqrt{(144 \cdot (D^2 + C^2) - (-27 - (D^2 + C^2))^2)}}{12 \cdot (D^2 + C^2)}\right) \\ \theta_3 = a \cos\left(\frac{(2.5 \cdot \cos(\theta_7) + \cos(\theta_9)) \cdot (27 - (D^2 + C^2)) + 2.5 \cdot (\sin(\theta_7) + \sin(\theta_9) - 12) \cdot \sqrt{(36 \cdot (D^2 + C^2) - (27 - (D^2 + C^2))^2)}}{6 \cdot (D^2 + C^2)}\right) \end{cases}$$

3) ESTABILIZACIÓN

La última ecuación de cierre involucra los ángulos ϑ_7 y ϑ_8 conocidos, el ángulo del estabilizador ($\vartheta_{11} = \vartheta_3 = \vartheta_1$) y la posición de la corredera X_{11} . Esta ecuación se muestra en la Figura 36.

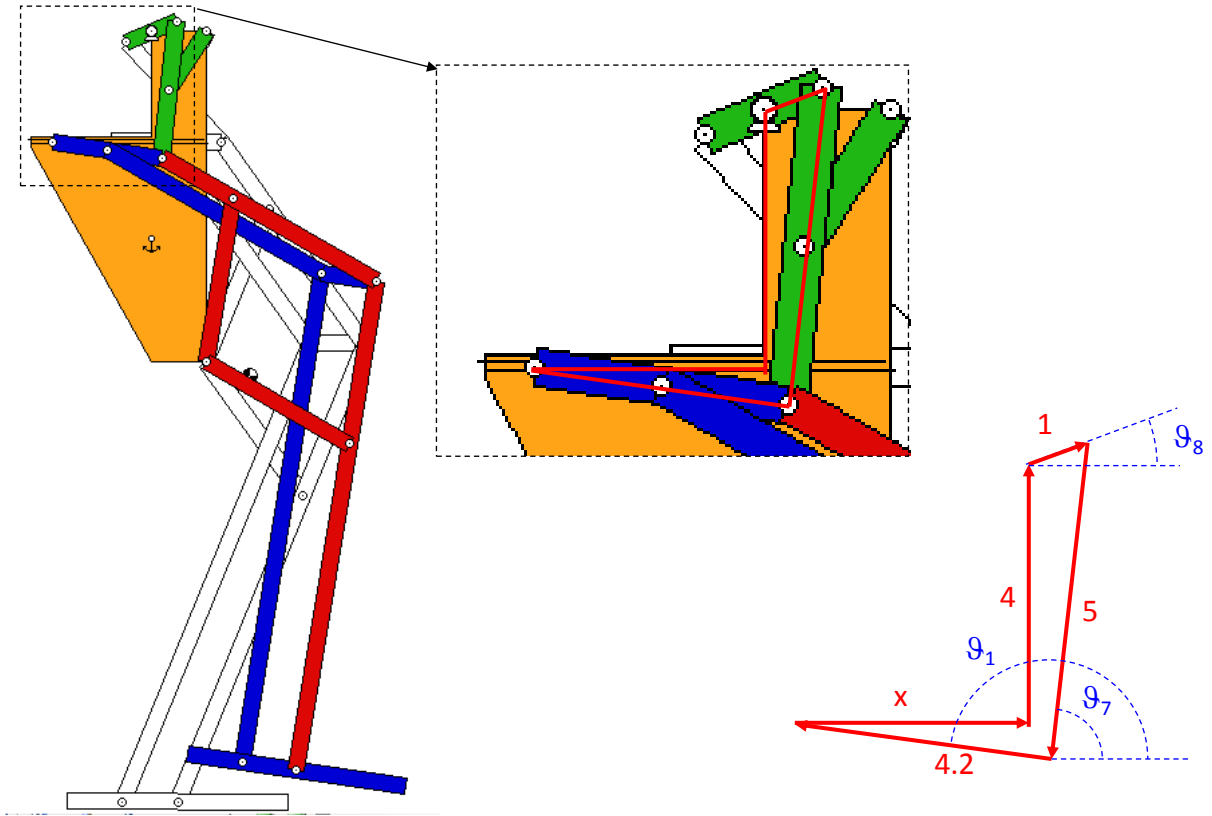


Figura 36: distancias y ángulos del mecanismo de estabilización.

Para obtener la última ecuación de cierre no hace falta la utilización de la ecuación 1; se pueden calcular las dos incógnitas despejando:

$$\begin{cases} -5 \cdot \cos(\theta_7) + 4.2 \cdot \cos(\theta_1) + X_{11} + \cos(\theta_8) = 0 \\ -5 \cdot \sin(\theta_7) + 4.2 \cdot \sin(\theta_1) + \sin(\theta_8) + 4 = 0 \end{cases}$$

cuya solución inmediata es:

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{5 \cdot \text{sen}(\theta_7) - \text{sen}(\theta_8) - 4}{4.2}$$

$$X_{11} = 4.2 \cdot \cos(\theta_1) - 5 \cdot \cos(\theta_7) + \cos(\theta_8)$$

X_{11} es la distancia horizontal del cursor con respecto al punto de apoyo de la manivela siempre en unidades de la manivela motor. Si quisiéramos saber la verdadera distancia, deberíamos multiplicar por la longitud de la mitad de la manivela, en nuestro caso 30 mm.

Las ecuaciones de cierre proporcionan los valores de:

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_7, \theta_9$ y X_{11} en función de θ_8

Por paralelismo se sabe que los ángulos tienen estas relaciones:

$$\theta_{10} = \theta_5 = \theta_1$$

$$\theta_{12} = \theta_4 = \theta_3$$

$$\theta_{13} = \theta_6 = \theta_2$$

Se sabe también que θ_{14} es cero debido a que los ángulos están tomados respecto a la dirección de la deslizadera la cual pertenece a la cadera.

En definitiva se conocen todos los ángulos y distancias, por lo tanto, la posición de cualquier punto en función del ángulo de entrada (θ_8).

El ángulo de entrada podría ser cualquiera, al tratarse de un mecanismo de un grado de libertad; con fijar cualquier ángulo o punto, se podría obtener todos los demás. Pero, debido a que el ángulo θ_8 es el ángulo del motor, que es lo que podemos configurar en nuestro robot, es el ángulo de entrada más lógico para analizar:

$$\theta_i = \theta_i(\theta_8) ; \quad \text{para } i=1,2,\dots, 13 \quad \text{y} \quad X_{11}=X_{11}(\theta_8)$$

Los ángulos y desplazamientos correspondientes a los eslabones de la otra pierna se obtienen sustituyendo en sus homónimos θ_8 por $\theta_8 + \pi$. Esto se puede observar en la Figura 37.

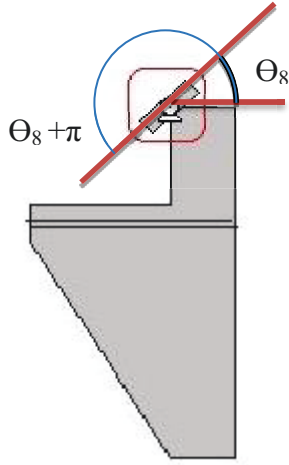


Figura 37: ángulo de la manivela motor para la pierna derecha e izquierda con su desfase.

Para referirnos a esos valores, teniendo en cuenta que estamos analizando el momento en que la pierna derecha está apoyada en el suelo, utilizaremos el superíndice prima: “’”.

$$\theta'_i = \theta_i(\theta_8 + \pi); \quad \text{para } i=1,2,\dots, 14 \quad \text{y} \quad X'_{11} = X_{11}(\theta_8 + \pi)$$

Si $\theta_8 = \theta_8(t)$; es decir, el PASIBOT está describiendo un movimiento, no se limita solo a estar en una posición fija, se obtienen todas las soluciones en función del tiempo:

$$\theta_i = \theta_i(t); \quad \text{para } i=1,2,\dots, 14 \quad \text{y} \quad X_{11} = X_{11}(t)$$

Analizaremos aquí el caso de ω_8 constante. Con lo cual: $\theta_8 = \omega_8 \cdot t$; y : $\alpha_8 = 0$;
Pero se podría analizar para cualquier función temporal de θ_8 .

El mecanismo de chevyshev proporciona una trayectoria aproximadamente recta y aproximadamente a velocidad constante, pero no exactamente. Esto implica que si consideramos el pie de apoyo fijo, la cadera no tiene un movimiento rectilíneo uniforme respecto al suelo (que tomaremos aquí como un sistema “suficientemente” inercial). De modo que no podemos tomar la cadera como sistema inercial para el desarrollo de la dinámica. Para referir los ángulos y posiciones al sistema supuestamente inercial del suelo debemos realizar el cambio de base consistente en sumar la cantidad $\pi - \theta_1$ (θ_1 es el ángulo mayor que forma el pie con la horizontal) a todos los ángulos referidos a la cadera. Concretamente:

$$\theta_i^{\text{suelofijo}} = \theta_i^{\text{caderafija}} + \pi - \theta_1^{\text{caderafija}}$$

Se observa en la Figura 38 que, para el ángulo θ_1 , la solución es trivial y constante de valor π radianes.

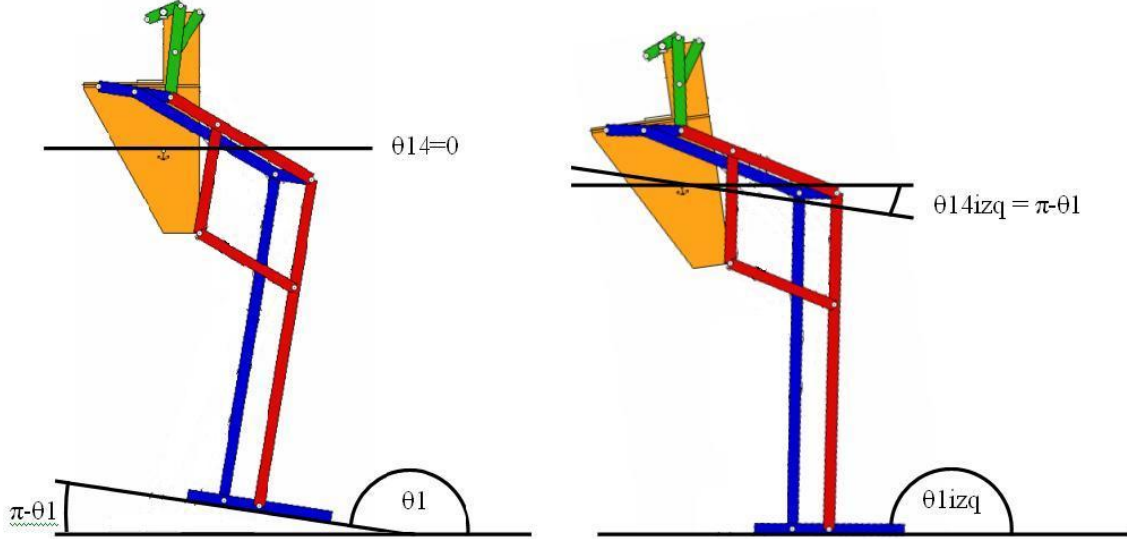


Figura 38: Cambio de base, tierra referida en izquierda a la cadera y derecha al suelo.

Al realizar este cambio, nuestra nueva θ_8 no es tan simple, y su derivada, α_8 , ya no es igual a cero.

En la nueva referencia, derivando una y dos veces se obtiene las ecuaciones de las velocidades y aceleraciones angulares respectivamente.

$$\omega_i = \dot{\theta}_i = \frac{d\theta_i}{dt}$$

$$\alpha_i = \ddot{\theta}_i = \frac{d^2\theta_i}{dt^2}$$

Ya se tiene las velocidades y aceleraciones angulares de todos los eslabones; ahora se necesita calcular las velocidades y aceleraciones lineales de los centros de masa de cada eslabón.

Respecto al sistema de referencia con origen en el centro de masas del pie de apoyo y fijo en el suelo, eslabón 1, llamaremos al vector posición: $r_i (x_i, y_i)$; al vector velocidad $v_i (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ y al vector aceleración $a_i(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i)$ a la posición, velocidad y aceleración del centro de masa del eslabón i .

Se puede obtener las posiciones de todos los eslabones en cualquier posición a partir de los ángulos obtenidos anteriormente, sumando las proyecciones de los eslabones contiguos.

Por ejemplo, para la posición del centro de masa del eslabón 2, habrá que sumar en su componente horizontal, la mitad de la longitud del pie, eslabón 1, más la proyección horizontal de la mitad del eslabón 2 (ya que el centro de masas está en la mitad); y en su componente vertical se suma solo la proyección vertical de la mitad del eslabón 2 como se muestra en la Figura 39. Una vez obtenida la posición en función del tiempo, derivando una y dos veces se calculan las velocidades y aceleraciones lineales del eslabón.

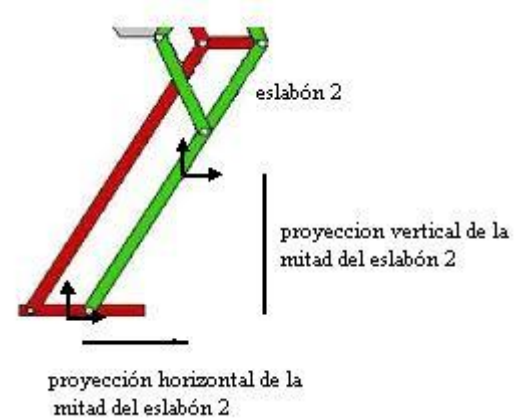


Figura 39: Proyecciones de la mitad del eslabón 2

$$\begin{aligned}x_2 &= l_1/2 + (l_2/2)\cos(\theta_2) \\y_2 &= (l_2/2)\sin(\theta_2) \\ \dot{x}_2 &= -(l_2/2)\sin(\theta_2)(\omega_2) \\ \dot{y}_2 &= (l_2/2)\cos(\theta_2)(\omega_2) \\ \ddot{x}_2 &= -(l_2/2)\cos(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) - (l_2/2)\sin(\theta_2)(\alpha_2) \\ \ddot{y}_2 &= -(l_2/2)\sin(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) + (l_2/2)\cos(\theta_2)(\alpha_2)\end{aligned}$$

Con el eslabón tres: para la componente horizontal de la posición, se suma la componente horizontal del eslabón 1, más toda la del eslabón 2, y más la mitad del eslabón 3, ya que el centro de masas está en la mitad. Con la componente vertical de la posición se calcula igual pero sumando las componentes verticales. La velocidad y aceleración se calculan derivando la posición:

$$\begin{aligned}x_3 &= l_1/2 + (l_2)\cos(\theta_2) + (l_3/2)\cos(\theta_3) \\y_3 &= (l_2)\sin(\theta_2) + (l_3/2)\sin(\theta_3) \\ \dot{x}_3 &= -(l_2)\sin(\theta_2)(\omega_2) - (l_3/2)\sin(\theta_3)(\omega_3) \\ \dot{y}_3 &= (l_2)\cos(\theta_2)(\omega_2) + (l_3/2)\cos(\theta_3)(\omega_3) \\ \ddot{x}_3 &= -(l_2)\cos(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) - (l_2)\sin(\theta_2)(\alpha_2) - (l_3/2)\cos(\theta_3)(\omega_3)(\omega_3) - (l_3/2)\sin(\theta_3)(\alpha_3) \\ \ddot{y}_3 &= -(l_2)\sin(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) + (l_2)\cos(\theta_2)(\alpha_2) - (l_3/2)\sin(\theta_3)(\omega_3)(\omega_3) + (l_3/2)\cos(\theta_3)(\alpha_3)\end{aligned}$$

Se repite la misma operación con el eslabón 4 (Figura 39); como ya se han obtenido previamente los ángulos y las distancias, se suman otra vez tanto las proyecciones horizontales como verticales de las posiciones partiendo desde tierra y luego se derivan para calcular las velocidades y aceleraciones lineales:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= l_1/2 + (l_2/2 + d_2)\cos(\theta_2) + (l_4/2)\cos(\theta_4) \\
 y_4 &= (l_2/2 + d_2)\sin(\theta_2) + (l_4/2)\sin(\theta_4) \\
 \dot{x}_4 &= -(l_2/2 + d_2)\sin(\theta_2)(\omega_2) - (l_4/2)\sin(\theta_4)(\omega_4) \\
 \dot{y}_4 &= (l_2/2 + d_2)\cos(\theta_2)(\omega_2) + (l_4/2)\cos(\theta_4)(\omega_4) \\
 \ddot{x}_4 &= -(l_2/2 + d_2)\cos(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) - (l_2/2 + d_2)\sin(\theta_2)(\alpha_2) - (l_4/2)\cos(\theta_4)(\omega_4)(\omega_4) - (l_4/2)\sin(\theta_4)(\alpha_4) \\
 \ddot{y}_4 &= -(l_2/2 + d_2)\sin(\theta_2)(\omega_2)(\omega_2) + (l_2/2 + d_2)\cos(\theta_2)(\alpha_2) - (l_4/2)\sin(\theta_4)(\omega_4)(\omega_4) + (l_4/2)\cos(\theta_4)(\alpha_4)
 \end{aligned}$$

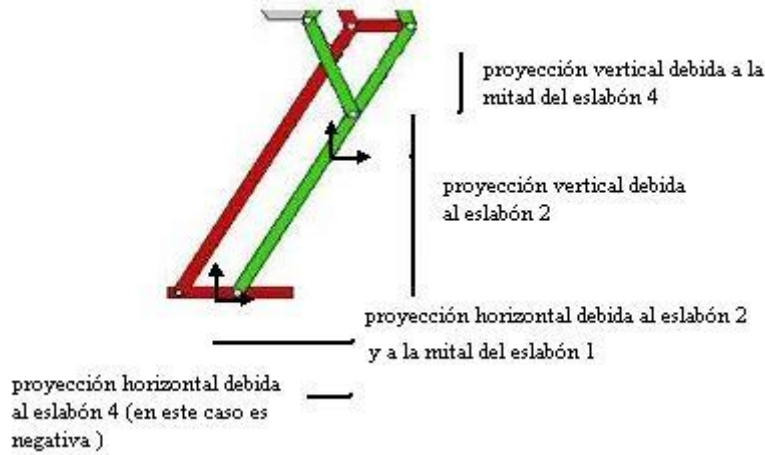


Figura 40: Proyecciones de los eslabones 2 y 4.

Con el resto de eslabones se procederá de forma similar. El resto de las ecuaciones para los otros eslabones se muestran en el anexo en el código del programa.

En definitiva, dada una función temporal para la manivela motor $\theta_8 = \theta_8(t)$ se han obtenido las posiciones, velocidades y aceleraciones tanto, angulares como lineales de los centros de masas, para todos los eslabones del bípedo respecto al pie de apoyo fijo.

Puesto que el motor actúa entre la cadera y la manivela, lo lógico es partir del valor de este ángulo respecto a la cadera y realizar el cambio de base expuesto anteriormente.

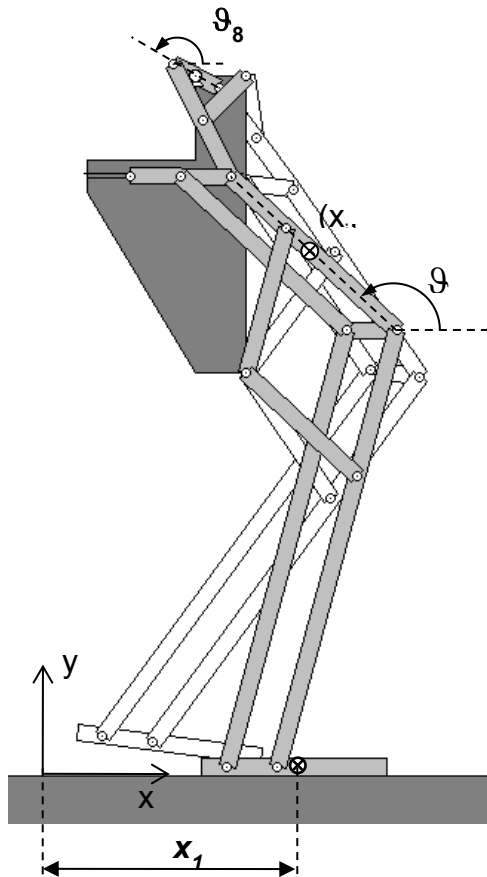
Destacar, que para los cálculos de la pierna izquierda, es exactamente igual, pero pasando por la cadera y se pueden calcular por varias vías. En el programa desarrollado en la presente tesis, se realiza el cálculo mediante diferentes caminos con el fin de comprobar que da el mismo resultado. [21][23][24]

3.5. Cinemática con deslizamiento del PASIBOT

En el capítulo anterior se ha expuesto la cinemática del bípedo efectuando un paso con el pie de apoyo anclado en el suelo.

En este capítulo se contemplará el deslizamiento del pie de apoyo mediante la introducción del correspondiente grado de libertad.

También se estudiarán las condiciones de vuelco en las dos direcciones.



Pie de apoyo no desliza:
1gdl (ϑ_8)

$$x_i = x_i^{pf}(\vartheta_8)$$

Pie de apoyo desliza:
2gdl (x_1, ϑ_8)

$$x_i = x_i(x_1, \vartheta_8) = x_i^{pf}(\vartheta_8) + x_1$$

Figura 41: Sistema de referencia para el PASIBOT deslizando.

En la Figura 41 se muestra el sistema de referencia para el PASIBOT en el caso de que pueda haber deslizamiento. Las ecuaciones cinemáticas con deslizamiento son las mismas que sin deslizamiento, salvo que se le suma a todas las componentes en x, ya sea de posición, velocidad y aceleración el valor del deslizamiento en posición, velocidad y aceleración del pie de apoyo, respectivamente.

Para resolver esta cinemática en concreto, necesitamos saber el cambio de posición del pie de apoyo (deslizamiento), su velocidad y aceleración, y para esto necesitamos saber la fuerza de rozamiento. Estos cálculos son el objetivo de la dinámica, que se aborda en el capítulo de la dinámica con deslizamiento.

3.6. Dinámica del PASIBOT

El análisis dinámico de un mecanismo es el estudio de su movimiento contemplando las fuerzas de enlace y aplicadas (o exteriores), ya sean incógnitas o datos de entrada.

La dinámica a su vez debe ser dividida en directa e inversa. Mediante la directa en la que se conocen las fuerzas externas y unas condiciones iniciales, se calcula toda la cinemática.

La dinámica inversa es la que se calcula a partir de una cinemática dada.

En la dinámica directa, los datos de entrada serían las fuerzas externas, en nuestro caso, el par del motor, mientras que en la inversa, el dato de entrada es el movimiento de PASIBOT, y las incógnitas son las fuerzas de enlace o ligadura y el par del motor necesario para generar ese movimiento.

3.7. Dinámica inversa del PASIBOT

Para resolver la dinámica inversa es imprescindible haber realizado el análisis cinemático antes. Sabiendo ya las posiciones, velocidades y aceleraciones, se van a plantear unas ecuaciones para calcular las fuerzas entre eslabones y el par motor necesario.

El bípedo PASIBOT es un mecanismo plano de 26 eslabones que serán considerados sólidos rígidos. La dinámica de cada uno de estos sólidos en movimiento plano supone dos ecuaciones para el movimiento de su centro de masas, y una tercera de rotación. Se obtiene, por tanto, un sistema de $26 \times 3 = 78$ ecuaciones algebraicas. No obstante, los eslabones 11 y 11' son cursores, pequeños cuerpos de masa despreciable, por lo que su giro es despreciable, con lo que se tendrían dos ecuaciones menos. Además, el eslabón 1 (pie de apoyo) está solidario con la tierra, con lo que se cuenta con otras tres ecuaciones menos. Es decir, se pueden plantear $78 - 5 = 73$ ecuaciones dinámicas.

Como ya se explicó en el capítulo “0

3.8. Metodología propuesta

De nuestra experiencia en estudios cinemáticos y dinámicos realizados en el departamento de ingeniería mecánica de la universidad Carlos III de Madrid hemos propuesto esta metodología de análisis paramétrico. Gracias a ella es posible obtener los resultados deseados para muchos estudios, como análisis de sensibilidad, optimizaciones, favorecer un control más simple, y en definitiva, un estudio que nos ofrezca no solo el análisis deseado, sino la posibilidad poder ver ese análisis de forma “inteligente”. Hemos definido el análisis como “inteligente” ya que para su realización se debe comprender el funcionamiento y editar las ecuaciones, pero gracias a ello, se obtiene los resultados de forma paramétrica y apreciando claramente las dependencias e influencias mecánicas de todas las partes.

Esta metodología consiste en definir primero la nomenclatura y topología. Después hay que elegir el número y tipo de coordenadas, en función del número y tipo de pares cinemáticos, tipo de contactos, tratamiento ideal/no ideal de pares cinemáticos (fricciones, holguras...). Encontrar las relaciones de cierre y las dependencias entre las distintas partes del mecanismo. En este punto, el problema puede abordarse de varias formas, fijando una cinemática y obteniendo la dinámica (dinámica inversa) o fijando las condiciones iniciales y fuerzas aplicadas y obteniendo el movimiento (dinámica directa) o fijando la posición inicial y aplicando un estudio cuasi-estático para obtener las fuerzas necesarias para realizar el movimiento deseado. Llegados a este punto, la metodología permite añadir grados de libertad, como añadir deslizamiento, condiciones de vuelco, variaciones de las partes para análisis de sensibilidad, aplicación de control o iterar el método para optimizar.

Esta metodología se puede observar en la Figura 30 que muestra el organigrama del “análisis mecánico inteligente”. Y es explicada con detalle aplicada al robot bípedo PASIBOT.

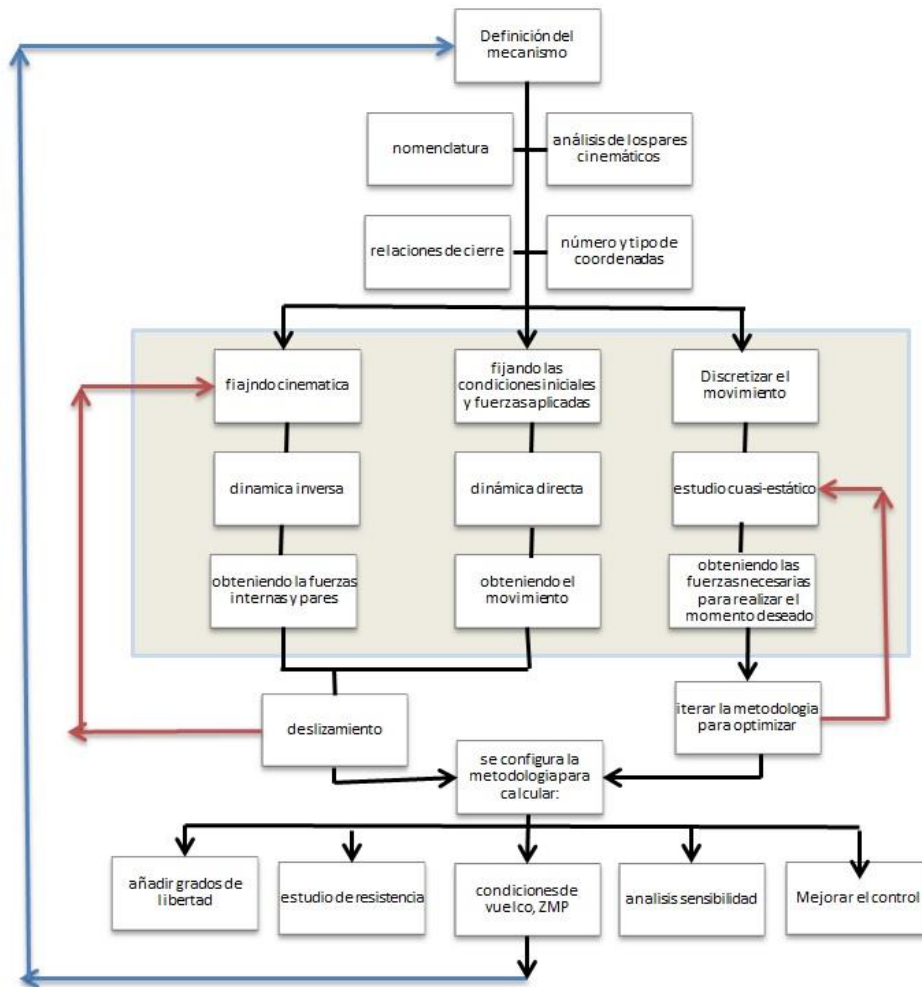


Figura 30: organigrama del “análisis mecánico inteligente”

Nomenclatura”, se tomará:

l_i = longitud del eslabón i [mm].

r_{ij} = vector posición de la articulación i-j desde el CdM del eslabón i [mm].

r_{ijx} = proyección del vector posición en el eje x [mm].

r_{ijy} = proyección del vector posición en el eje y [mm].

θ_i = Ángulo del eslabón i con el eje x [rad].

$\dot{\theta}_i$ = velocidad angular del eslabón i [rad/s].

$\ddot{\theta}_i$ = aceleración angular del eslabón i [rad/s²].

m_i = masa del eslabón i [Kg].

I_i = momento de inercia del eslabón i con respecto al eje perpendicular al plano de giro que pasa por el centro de masas [Kg.mm²].

f_{ij} = fuerza que ejerce el eslabón i sobre el j [N].

f_{ijy} = proyección de f_{ij} sobre el eje y [N].

f_{ijx} = proyección de f_{ij} sobre el eje x [N].

La tercera ley de Newton establece que: $f_{ij} = -f_{ji}$ (en las dos componentes), con lo cual se simplificarán los cálculos y se tendrá el menor número de incógnitas posibles si en las ecuaciones sólo aparecen las fuerzas f_{ij} tales que $i < j$. Si se ha de considerar una fuerza tal que $i > j$, será cambiada por: $f_{ij} = -f_{ji}$.

En la Figura 42 se muestra un eslabón genérico, con su centro de masas (representado en la figura como C.M.).

En este eslabón i tiene: una masa m_i , longitud l_i y momento de Inercia:

$$I_i = m_i l_i^2 / 12$$

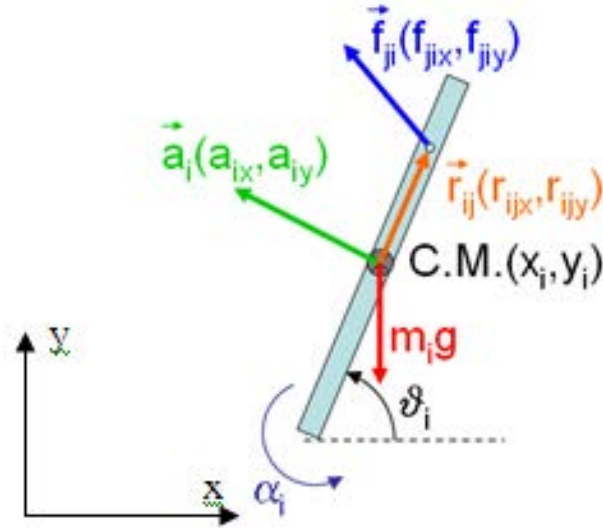


Figura 42: fuerzas sobre un eslabón.

En la Figura 42 se representa en azul la fuerza f_{ji} ; fuerza ejercida por el eslabón j sobre el i; en rojo la fuerza debido a la masa: $m_i g$; peso del eslabón i; en amarillo el vector posición: r_{ij} ; posición de la articulación i-j desde el CM de i; en verde: a_i ; aceleración del centro de masa de i; y en morado: α_i ; aceleración angular del eslabón i.

De acuerdo con lo expuesto, las tres ecuaciones dinámicas del sistema plano del eslabón son:

$$\left. \begin{array}{l} \sum \vec{F}_{sobre i} = m_i \vec{a}_i \\ \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \\ \sum M_{sobre i} = I_i \alpha_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j<i} f_{jix} - \sum_{k>i} f_{ikx} = m_i a_{ix} \leftarrow (1) \\ \sum_{j<i} f_{jiy} - \sum_{k>i} f_{iky} = m_i g + m_i a_{iy} \leftarrow (2) \\ \sum_{j<i} (r_{ijx} f_{jiy} - r_{ijy} f_{jix}) - \sum_{k>i} (r_{ikx} f_{iky} - r_{iky} f_{ikx}) = I_i \alpha_i \leftarrow (3) \end{array} \right.$$

Estas tres ecuaciones se plantean para los 26 eslabones, teniendo en cuenta que el eslabón 1 (pie de apoyo) no se estudia, y que los siguientes eslabones: eslabón 11 y eslabón 11' (cursores), tienen momentos de inercia despreciables. Con esto se plantea un sistema de 73 ecuaciones.

Las incógnitas de la dinámica inversa son el par del motor necesario (T_s), y las fuerzas entre eslabones. A primera vista, viendo la interacción de los eslabones en contacto mecánico se vería que tenemos 43 fuerzas y el par, las cuales se

nombran en la siguiente tabla (ver en Figura 43 en PASIBOT con los eslabones numerados):

$f_{1,2}$	$f_{1,13}$	$f_{10,11}$	$f_{8,7'}$
$f_{2,3}$	$f_{2,4}$	$f_{14,4'i'}$	$f_{14,6'}$
$f_{2,5}$	$f_{3,6}$	$f_{14,9'}$	$f_{14,11'}$
$f_{3,5}$	$f_{3,10}$	$f_{1',2'}$	$f_{1',13'}$
$f_{3,7}$	$f_{5,12}$	$f_{2',3'}$	$f_{2',4'}$
$f_{4,14}$	$f_{6,14}$	$f_{2',5'}$	$f_{3',5'}$
$f_{5,13}$	$f_{7,9}$	$f_{3',7'}$	$f_{3',6'}$
$f_{7,8}$	$f_{7,10}$	$f_{7',10'}$	$f_{3',10'}$
$f_{8,14}$	$f_{11,14}$	$f_{5',12'}$	$f_{5',13'}$
$f_{12,13}$	$f_{9,14}$	$f_{7',9'}$	$f_{10',11'}$
T_8	$f_{10,12}$	$f_{10',12'}$	$f_{12',13'}$

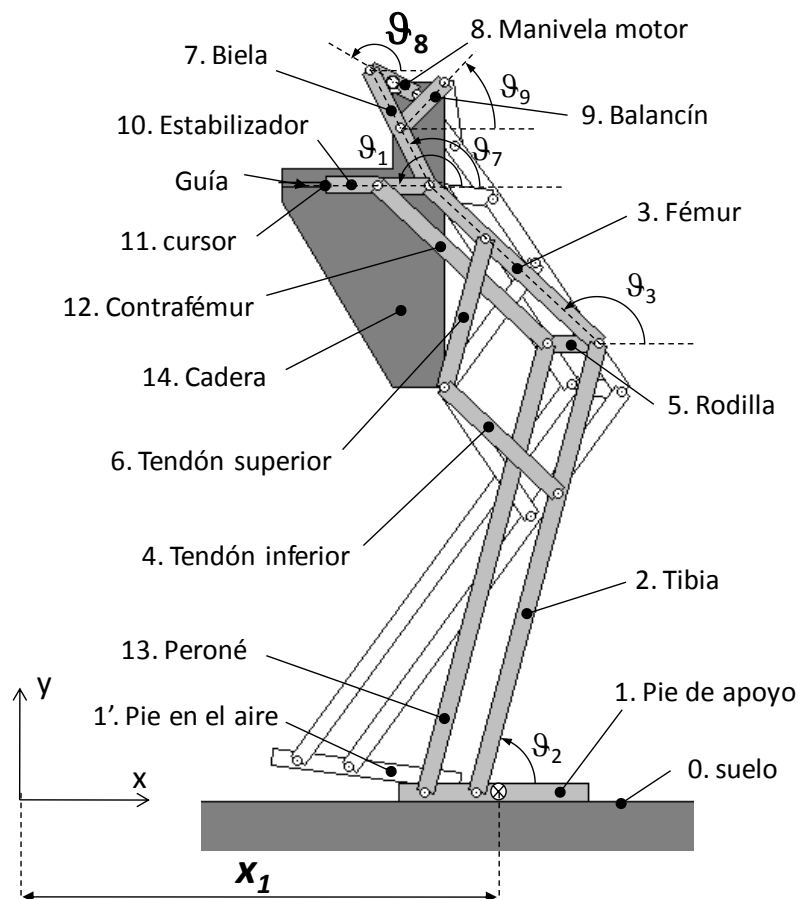


Figura 43: nomenclatura de los eslabones del PASIBOT.

Esto equivale a 87 incógnitas, y como solo hay 73 ecuaciones, a simple vista parece que no tiene solución, pero, estas fuerzas han sido obtenidas sin tener en cuenta la teoría de las articulaciones triples:

Cuando se tiene una articulación triple, pongamos por ejemplo, tres eslabones (A, B y C) unidos todos ellos por un extremo. El eslabón A recibe las dos fuerzas de: fuerza de B sobre A (f_{BA}) y de C sobre A (f_{CA}). El eslabón B recibe a su vez la fuerza de A sobre B (f_{AB}) y C sobre B (f_{CB}). Y por último el eslabón C recibe A sobre C (f_{CA}) y B sobre C (f_{BC}).

Esto parecería correcto si no nos diéramos cuenta que hemos planteado una ecuación de más ya que el análisis de los tres juntos debería ser el mismo que el de A con B más el de A con C. Si tuviéramos esto, solo existirían las fuerzas de A sobre B ($f_{AB}=-f_{BA}$) y de A sobre C ($f_{AC}=-f_{CA}$). Con lo cual se concluye que una de las fuerza (por ejemplo la fuerza de B sobre C) se puede tomar como nula ($f_{BC}=-f_{CB}=0$).

Esto se resume en que siempre que se tenga una articulación triple, es decir, tres eslabones unidos con sus respectivas tres fuerzas, una de ellas es nula, dependiendo de la configuración de la articulación.

En el análisis del PASIBOT se tomarán las siguientes fuerzas como nulas:

$f_{3,5}$	$f_{7,10}$	$f_{12,13}$	$f_{3',5'}$	$f_{7',10'}$	$f_{12',13'}$
-----------	------------	-------------	-------------	--------------	---------------

Con lo cual, ya solo tenemos 37 fuerzas y el par, dos fuerzas solo son en el eje x, por tanto, $35 \times 2 + 2 + 1 = 73$ incógnitas planteadas en nuestro sistema de 73 ecuaciones linealmente independientes. En definitiva, hemos planteado un sistema compatible determinado. Con lo cual, tiene solución única.

Se toma como signos positivos, el eje horizontal hacia la derecha, el eje vertical hacia arriba, y el sentido de giro positivo el antihorario. Los momentos son calculados como el producto entre la distancia perpendicular desde el centro de masas y la fuerza. Sabiendo que muchas veces el centro de masas está justo en la mitad del eslabón, con lo cual: $r_{ij}=-r_{ji}$, se simplificará siempre que sea posible cambiando los signos para tener menos variables. Con esto, y sabiendo donde están los centros de masas de cada eslabón y el valor de los ángulos se plantean las ecuaciones dinámicas para cada eslabón:

Eslabón2 (tibia)

$$\begin{aligned}
 f_{12x} - f_{23x} - f_{24x} - f_{25x} &= m_2 a_{2x} \\
 f_{12y} - f_{23y} - f_{24y} - f_{25y} &= m_2 g + m_2 a_{2y} \\
 r_{21x} f_{12y} - r_{21y} f_{12x} + r_{21x} f_{23y} - r_{21y} f_{23x} - r_{24x} f_{24y} + r_{24y} f_{24x} + r_{21x} f_{25y} - r_{21y} f_{25x} &= I_2 \alpha_2
 \end{aligned}$$

Donde:

$$r_{21} = [r_{21x}, r_{21y}] = [(-l_2/2)\cos\theta_2, (-l_2/2)\sin\theta_2] = -r_{23}$$

$$r_{24} = [r_{24x}, r_{24y}] = [d_2 \cos\theta_2, d_2 \sin\theta_2]$$

Eslabón3 (fémur)

$$f_{23x} - f_{36x} - f_{37x} - f_{310x} = m_3 a_{3x}$$

$$f_{23y} - f_{36y} - f_{37y} - f_{310y} = m_3 g + m_3 a_{3y}$$

$$r_{32x} f_{23y} - r_{32y} f_{23x} - r_{36x} f_{36y} + r_{36y} f_{36x} + r_{32x} f_{37y} - r_{32y} f_{37x} + r_{32x} f_{310y} - r_{32y} f_{310x} = I_3 \alpha_3$$

Donde:

$$r_{32} = r_{35} = [r_{32x}, r_{32y}] = [(-l_3/2)\cos\theta_3, (-l_3/2)\sin\theta_3] = -r_{310} = -r_{37}$$

$$r_{36} = [r_{36x}, r_{36y}] = [d_3 \cos\theta_3, d_3 \sin\theta_3]$$

Eslabón4 (tendón inferior)

$$f_{24x} - f_{414x} = m_4 a_{4x}$$

$$f_{24y} - f_{414y} = m_4 g + m_4 a_{4y}$$

$$r_{42x} f_{24y} - r_{42y} f_{24x} + r_{42x} f_{414y} - r_{42y} f_{414x} = I_4 \alpha_4$$

Donde:

$$r_{42} = [r_{42x}, r_{42y}] = [(-l_4/2)\cos\theta_4, (-l_4/2)\sin\theta_4] = -r_{414}$$

Eslabón5 (rodilla)

$$f_{25x} - f_{512x} - f_{513x} = m_5 a_{5x}$$

$$f_{25y} - f_{512y} - f_{513y} = m_5 g + m_5 a_{5y}$$

$$r_{52x} f_{25y} - r_{52y} f_{25x} + r_{52x} f_{512y} - r_{52y} f_{512x} + r_{52x} f_{513y} - r_{52y} f_{513x} = I_5 \alpha_5$$

Dónde:

$$r_{52} = r_{53} = [r_{53x}, r_{53y}] = [(l_5/2), 0] = -r_{513} = -r_{512}$$

Eslabón6 (tendón superior)

$$f_{36x} - f_{614x} = m_6 a_{6x}$$

$$f_{36y} - f_{614y} = m_6 g + m_6 a_{6y}$$

$$r_{63x} f_{36y} - r_{63y} f_{36x} + r_{63x} f_{614y} - r_{63y} f_{614x} = I_6 \alpha_6$$

Dónde:

$$r_{63} = [r_{63x}, r_{63y}] = [(l_6 / 2) \cos \theta_6, (l_6 / 2) \sin \theta_6] = -r_{614}$$

Eslabón7 (biela)

$$f_{37x} - f_{78x} - f_{79x} = m_7 a_{7x}$$

$$f_{37y} - f_{78y} - f_{79y} = m_7 g + m_7 a_{7y}$$

$$r_{73x} f_{37y} - r_{73y} f_{37x} + r_{73x} f_{78y} - r_{73y} f_{78x} = I_7 \alpha_7$$

Donde:

$$r_{73} = r_{710} = [r_{73x}, r_{73y}] = [(-l_7 / 2) \cos \theta_7, (-l_7 / 2) \sin \theta_7] = -r_{78}$$

Eslabón8 (manivela)

$$f_{78x} - f_{814x} - f_{87izqx} = m_8 a_{8x}$$

$$f_{78y} - f_{814y} - f_{87izqy} = m_8 g + m_8 a_{8y}$$

$$r_{87x} f_{78y} - r_{87y} f_{78x} + r_{87x} f_{87izqy} - r_{87y} f_{87izqx} + T_8 = 0$$

Donde:

$$r_{87} = [r_{87x}, r_{87y}] = [(l_8 / 2) \cos \theta_8, (l_8 / 2) \sin \theta_8] = -r_{87izq}$$

$$r_{814} = r_{814izq} = 0$$

Eslabón9 (balancín)

$$f_{79x} - f_{914x} = m_9 a_{9x}$$

$$f_{79y} - f_{914y} = m_9 g + m_9 a_{9y}$$

$$r_{97x} f_{79y} - r_{97y} f_{79x} + r_{97x} f_{914y} - r_{97y} f_{914x} = I_9 \alpha_9$$

Donde:

$$r_{97} = [r_{97x}, r_{97y}] = [(-l_9 / 2) \cos \theta_9, (-l_9 / 2) \sin \theta_9] = -r_{914}$$

Eslabón10 (estabilizador)

$$f_{310x} - f_{101kx} - f_{1012x} = m_{10} a_{10x}$$

$$f_{310y} - f_{101ky} - f_{1012y} = m_{10} g + m_{10} a_{10y}$$

$$r_{103x} f_{310y} - r_{103y} f_{310x} + r_{103x} f_{101ky} - r_{103y} f_{101kx} - r_{1012x} f_{1012y} + r_{1012y} f_{1012x} = I_{10} \alpha_{10}$$

Donde:

$$r_{103} = r_{107} = [r_{103x}, r_{103y}] = [(-l_{10}/2)\cos\theta_{10}, (-l_{10}/2)\sin\theta_{10}] = -r_{1011}$$

$$r_{1012} = [r_{1012x}, r_{1012y}] = [d_{10}\cos\theta_{10}, d_{10}\sin\theta_{10}]$$

Eslabón11 (cursor)

$$f_{1011x} = m_{11}a_{11x}$$

$$f_{1011y} - f_{1114y} = m_{11}g + m_{11}a_{11y}$$

La corredera no tiene ecuación de momentos.

Eslabón12 (contrafémur)

$$f_{512x} - f_{1012x} = m_{12}a_{12x}$$

$$f_{512y} - f_{1012y} = m_{12}g + m_{12}a_{12y}$$

$$r_{125x}f_{512y} - r_{125y}f_{512x} - r_{125x}f_{1012y} + r_{125y}f_{1012x} = I_{12}\alpha_{12}$$

Donde:

$$r_{125} = r_{1213} = [r_{125x}, r_{125y}] = [(-l_{12}/2)\cos\theta_{12}, (-l_{12}/2)\sin\theta_{12}] = -r_{1210}$$

Eslabón13 (peroné)

$$f_{113x} + f_{513x} = m_{13}a_{13x}$$

$$f_{113y} + f_{513y} = m_{13}g + m_{13}a_{13y}$$

$$r_{131x}f_{113y} - r_{131y}f_{113x} - r_{131x}f_{513y} + r_{131y}f_{513x} = I_{13}\alpha_{13}$$

Donde:

$$r_{131} = [r_{131x}, r_{131y}] = [(-l_{13}/2)\cos\theta_{13}, (-l_{13}/2)\sin\theta_{13}] = -r_{135} = -r_{1312}$$

Eslabón14 (cadera)

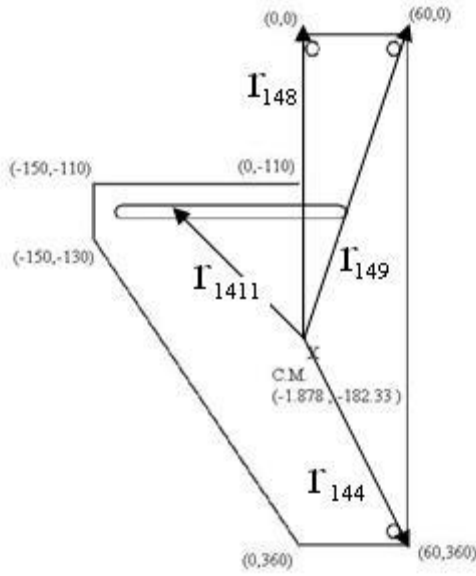


Figura 44: Cadera del PASIBOT con los vectores distancia al centro de masas

$$\begin{aligned}
 f_{414x} + f_{614x} + f_{814x} + f_{914x} - f_{144x} - f_{146x} - f_{149x} &= m_{14}a_{14x} \\
 f_{414y} + f_{614y} + f_{814y} + f_{914y} - f_{144y} - f_{146y} - f_{149y} &= m_{14}g + m_{14}a_{14y} \\
 (r_{144x}f_{414y} - r_{144y}f_{414x} + r_{144x}f_{614y} - r_{144y}f_{614x} + r_{148x}f_{814y} - r_{148y}f_{814x} + r_{149x}f_{914y} - r_{149y}f_{914x} + \\
 + r_{1411x}f_{1114y} - r_{144x}f_{144y} + r_{144y}f_{144x} - r_{144x}f_{146'y} + r_{144y}f_{146'x} - r_{149x}f_{149y} + r_{149y}f_{149x} - \\
 - r_{1411x}f_{1411'y} - T_8) &= I_{14}\alpha_{14}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$r_{144} = r_{146} = r_{144zq} = r_{146} = [r_{144x}, r_{144y}]$$

$$r_{149} = r_{149} = [r_{149x}, r_{149y}]$$

$$r_{1411} = [r_{1411x}, r_{1411y}]$$

$$r_{1411} = [r_{1411x}, r_{1411y}]$$

Estos valores dependen de la dimensión de la cadera, para nuestro caso general (ver Figura 44):

$$r_{1411} = [X11 \cdot 30 + 1.878, r_{1411y}]$$

$$r_{1411} = [X11' \cdot 30 + 1.878, r_{1411y}]$$

$$r_{1411y} = 62.328; r_{144x} = 61.878; r_{144y} = -177.672; \quad r_{149x} = r_{144x} \quad y \quad r_{149y} = -182.328$$

contantes y en [mm]

Eslabón1' (pie en el aire)

$$\begin{aligned}-f_{1'2'x} - f_{1'1'3'x} &= m_{1'}a_{1'x} \\ -f_{1'2'y} - f_{1'1'3'y} &= m_{1'}g + m_{1'}a_{8y} \\ -r_{1'2'x}f_{1'2'2'y} + r_{1'2'y}f_{1'2'x} - r_{1'1'3'x}f_{1'1'3'y} + r_{1'1'3'y}f_{1'1'3'x} &= I_{1'}\alpha_{1'}\end{aligned}$$

Donde:

$$r_{1'2'} = [(-l_1/2)\cos\theta_{1'}, (-l_1/2)\sin\theta_{1'}] = -r_{1'1'3'}$$

Eslabón7' (biela del pie en el aire)

$$\begin{aligned}f_{3'7'x} + f_{87x} - f_{7'9'x} &= m_{7'}a_{7'x} \\ f_{3'7'y} + f_{87y} - f_{7'9'y} &= m_{7'}g + m_{7'}a_{7'y} \\ r_{7'3'x}f_{3'7'y} - r_{7'3'y}f_{3'7'x} - r_{7'3'x}f_{87y} + r_{7'3'y}f_{87x} &= I_7\alpha_7\end{aligned}$$

Donde:

$$r_{7'3'} = [r_{7'3'x}, r_{7'3'y}] = [(-l_7/2)\cos\theta_{7'}, (-l_7/2)\sin\theta_{7'}] = -r_{7'8}$$

Eslabón9' (balancín del pie en el aire)

$$\begin{aligned}f_{7'9'x} + f_{149x} &= m_9a_{9'x} \\ f_{7'9'y} + f_{149y} &= m_9g + m_9a_{9'y} \\ r_{9'7'x}f_{7'9'y} - r_{9'7'y}f_{7'9'x} - r_{9'7'x}f_{149y} + r_{9'7'y}f_{149x} &= I_9\alpha_{9'}\end{aligned}$$

Donde:

$$r_{9'7'} = [(-l_9/2)\cos\theta_{9'}, (-l_9/2)\sin\theta_{9'}] = -r_{149}$$

Las ecuaciones de los eslabones pertenecientes a la pierna en el aire son iguales a sus homónimos, pero con el dato de entrada diferente, con lo cual las variables serán nombradas con el superíndice ' :

$$\begin{aligned}a_j &\rightarrow a_{j'} \\ \theta_j &\rightarrow \theta_{j'} \\ r_{jk} &\rightarrow r_{j',k'} \\ \alpha_j &\rightarrow \alpha_{j'}\end{aligned}$$

Y los parámetros que tienen el mismo valor en ambas piernas conservarán el mismo superíndice:

$$l_j = l_{j'}$$

$$m_j = m_{j'}$$

$$I_j = I_{j'}$$

Con esto, ya tenemos planteadas las 73 ecuaciones con sus 73 incógnitas (35 fuerzas descompuestas en los ejes “x” e “y”, dos fuerzas solo en eje “x” y un par). Este sistema se resuelve de forma matricial con un sistema de estas dimensiones: $[73 \times 73][73 \times 1] = [73 \times 1]$

$$[A][R] = [V]$$

donde

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & . & . & . & . & . & a_{1,73} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & a_{71,72} & a_{71,73} \\ . & . & . & . & . & . & a_{72,71} & a_{72,72} & a_{72,73} \\ a_{73,1} & . & . & . & . & . & a_{73,71} & a_{73,72} & a_{73,73} \end{bmatrix}$$

Las variables:

$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,73}, a_{2,1}, \dots, a_{73,73}$ son los coeficientes que multiplican a las fuerzas

$$[R] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ F_{73} \end{bmatrix} ; \quad [V] = \begin{bmatrix} In_1 \\ In_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ In_{73} \end{bmatrix} ;$$

$[R]$ es el vector de las fuerzas, las 73 incógnitas que se quieren obtener.

$[V]$ es el vector de las inercias (masas por aceleraciones de centros de masa, pesos y momentos de inercia por aceleraciones angulares) calculadas gracias al análisis de la cinemática prescrita.

La matriz $[A]$ se puede descomponer en 25 bloques horizontales. Cada bloque corresponde a un eslabón y es una matriz de $[3 \times 73]$ salvo para los eslabones 11 y 11' asociados a los bloques de la corredera de $[2 \times 73]$. A continuación se muestran los bloques y a qué parte del PASIBOT pertenecen:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 = \textit{tibia} \\ A_2 = \textit{fémur} \\ A_3 = \textit{tendón} - \textit{inf} \\ A_4 = \textit{rodilla} \\ A_5 = \textit{tendón} - \textit{sup} \\ A_6 = \textit{biela} \\ A_7 = \textit{manivela} \\ A_8 = \textit{balancín} \\ A_9 = \textit{estabilizador} \\ A_{10} = \textit{cursor} \\ A_{11} = \textit{contrafémur} \\ A_{12} = \textit{peroné} \\ A_{13} = \textit{cadera} \\ A_{14} = \textit{pie} - \textit{izq} \\ A_{15} = \textit{tibia} - \textit{izq} \\ A_{16} = \textit{fémur} - \textit{izq} \\ A_{17} = \textit{tendón} - \textit{inf} - \textit{izq} \\ A_{18} = \textit{rodilla} - \textit{izq} \\ A_{19} = \textit{tendón} - \textit{sup} - \textit{izq} \\ A_{20} = \textit{biela} - \textit{izq} \\ A_{21} = \textit{balancín} - \textit{izq} \\ A_{22} = \textit{estabilizador} - \textit{izq} \\ A_{23} = \textit{cursor} - \textit{izq} \\ A_{24} = \textit{contrafémur} - \textit{izq} \\ A_{25} = \textit{peroné} - \textit{izq} \end{bmatrix}$$

Donde, por ejemplo, $[A_1]$ se obtiene a partir de los coeficientes en la primera ecuación (eslabón 2) y tiene la forma:

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -r_{21y} & r_{21x} & 0 & 0 & -r_{21y} & r_{21x} & r_{24y} & -r_{24x} & -r_{21y} & r_{21x} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

Las demás A_i partes de la matriz son calculadas de la misma forma.

El vector $[R]$ se va a descomponer también en 25 sub-vectores. Son 25 ya que el PASIBOT se divide en 25 partes analizadas en total:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ R_{25} \end{bmatrix} ; [R_1] = \begin{bmatrix} f_{12x} \\ f_{12y} \\ f_{23x} \\ f_{23y} \\ f_{24x} \\ f_{25y} \\ f_{26x} \\ f_{26y} \end{bmatrix}$$

Donde R_1 es el conjunto de fuerzas que influyen en las ecuaciones dinámicas del eslabón 2.

$$[R_2] = \begin{bmatrix} f_{36x} \\ f_{36y} \\ f_{37x} \\ f_{37y} \\ f_{310x} \\ f_{310y} \end{bmatrix} \quad \text{En } R_2 \text{ se tiene las fuerzas involucradas en el eslabón 3; excluyendo las que ya se han planteado en } R_1. \text{ Y así sucesivamente.}$$

El vector $[V]$ también se descompone en las mismas 25 partes.

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ V_{25} \end{bmatrix}$$

Donde V_1 son los términos de inercia de las ecuaciones dinámicas del eslabón 2.

$$[V_1] = \begin{bmatrix} m_2 \cdot a_{2x} \\ m_2 \cdot g + m_2 \cdot a_{2y} \\ I_2 \cdot \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Y así ocurre con todos los $[V_i]$

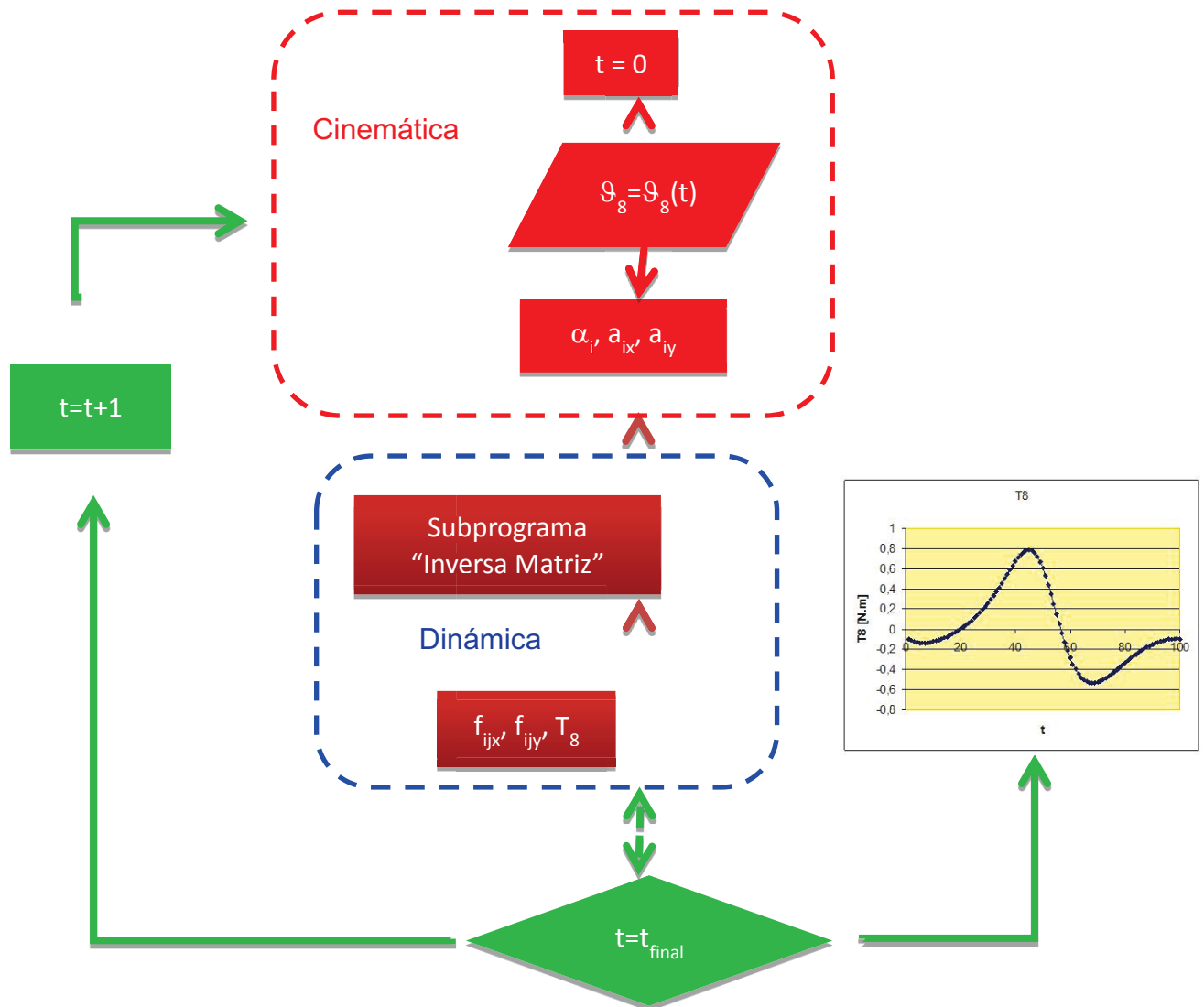
Con esto, ya está perfectamente planteado el sistema: $[A][R]=[V]$ de dimensiones: $[73 \times 73][73 \times 1]=[73 \times 1]$ correspondiente al análisis dinámico inverso.

La solución se obtiene invirtiendo la matriz $[A]$: $[R]=[A]^{-1}[V]$

Esta operación se realiza para cada paso de cálculo correspondiente a la discretización temporal del paso.

A continuación se muestra el algoritmo de cálculo:

Algoritmo de cálculo para dinámica inversa con pie de apoyo fijo.



3.9. Dinámica directa del PASIBOT

La dinámica directa de un mecanismo tiene como fin obtener su movimiento tomando como dato las fuerzas aplicadas (en nuestro caso el par motor) y el estado cinemático inicial.

Ahora el par motor pasa a ser dato conocido y las incógnitas son, además de las fuerzas entre eslabones (que ya lo eran en el problema dinámico inverso), la aceleración de la manivela motor.

De hecho, todas las demás aceleraciones (de los C.M. y angulares) se podrán expresar en función de la cinemática de la manivela motor previamente obtenido en el capítulo de la cinemática.

De esta manera se logra plantear todas las velocidades y aceleraciones en función del ángulo (θ_8) y ($\dot{\theta}_8$) y ($\ddot{\theta}_8$) respectivamente. Este ángulo, la velocidad angular y la aceleración angular serán las incógnitas. Las cuáles serán calculas a partir, como ya hemos comentado, de unas condiciones iniciales y de las fuerzas externas que queramos aplicar al PASIBOT (en nuestro caso será imponer un par en el motor).

Llamaremos:

$x'_i = x'_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la posición en x del eslabón i respecto a θ_8 .

$x''_i = x''_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la aceleración en x del eslabón i respecto a θ_8 .

$y'_i = y'_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la posición en y del eslabón i respecto a θ_8 .

$y''_i = y''_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la aceleración en y del eslabón i respecto a θ_8 .

$\theta'_i = \theta'_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la posición en teta del eslabón i respecto a θ_8 .

$\theta''_i = \theta''_i(\theta_8)$ a la derivada parcial de la aceleración en teta del eslabón i respecto a θ_8 .

Estas derivadas parciales pueden ser calculadas a partir de las ecuaciones de la cinemática (explicado en el capítulo 3.4).

Sabiendo estas relaciones y las condiciones iniciales, se puede despejar todas las posiciones, velocidades y aceleraciones en función del ángulo (θ_8) y ($\dot{\theta}_8$) y ($\ddot{\theta}_8$):

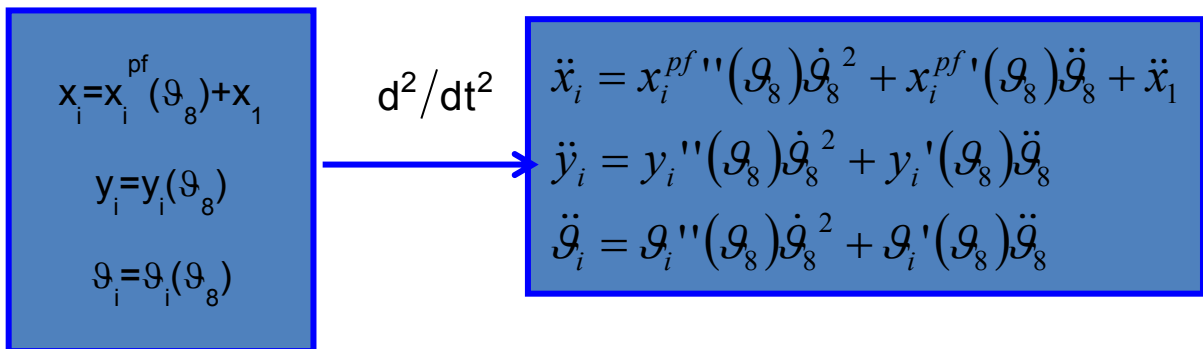
$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dx_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = \dot{x}_1 + \frac{dx_i(\theta_8)}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = x'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\ \ddot{x}_i &= \ddot{x}_1 + \frac{d^2x_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{dx_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = \ddot{x}_1 + x''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + x'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8 \\ \dot{y}_i &= \frac{dy_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = y'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\ \ddot{y}_i &= \frac{d^2y_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{dy_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = y''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + y'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8 \\ \dot{\theta}_i &= \frac{d\theta_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = \theta'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\ \ddot{\theta}_i &= \frac{d^2\theta_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{d\theta_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = \theta''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + \theta'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8\end{aligned}$$

Dando como entrada el par y las condiciones iniciales y sabiendo la relación entre las posiciones y θ_8 se calcula para el siguiente punto, y con ello toda la cinemática y dinámica. Estos datos se utilizan como entrada para el siguiente punto y así sucesivamente.

El sistema explicado es representado a continuación:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_i(\theta_8) \\
 \dot{x}_i &= \frac{dx_i}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{dx_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = \dot{x}_1 + \frac{dx_i(\theta_8)}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = x'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\
 \ddot{x}_i &= \ddot{x}_1 + \frac{d^2 x_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{dx_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = \ddot{x}_1 + x''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + x'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8 \\
 y_i &= y_i(\theta_8) \\
 \dot{y}_i &= \frac{dy_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = y'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\
 \ddot{y}_i &= \frac{d^2 y_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{dy_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = y''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + y'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8 \\
 \theta_i &= \theta_i(\theta_8) \\
 \dot{\theta}_i &= \frac{d\theta_i}{d\theta_8} \dot{\theta}_8 = \theta'_i(\theta_8) \dot{\theta}_8 \\
 \ddot{\theta}_i &= \frac{d^2 \theta_i(\theta_8)}{d\theta_8^2} \dot{\theta}_8^2 + \frac{d\theta_i(\theta_8)}{d\theta_8} \ddot{\theta}_8 = \theta''_i(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 + \theta'_i(\theta_8) \ddot{\theta}_8
 \end{aligned}$$

A continuación se representa un cuadro explicativo, donde se puede observar cómo se realizan las derivadas parciales y su regla de derivación, y la nomenclatura utilizada. Es preciso comentar que el superíndice pf es para destacar que es del “pie fijo”, ya que después del capítulo dinámica con deslizamiento se tendrá en cuenta la posibilidad de que no sea fijo y deslice.



Este sistema se plantea para cada eslabón:

$$\begin{cases} \sum_{j<i} f_{ji_x} - \sum_{k>i} f_{ik_x} - m_i x_i'(\vartheta_8) \ddot{\vartheta}_8 = m_i x_i''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \\ \sum_{j<i} f_{ji_y} - \sum_{k>i} f_{ik_y} - m_i y_i'(\vartheta_8) \ddot{\vartheta}_8 = m_i g + m_i y_i''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \\ \sum_{j<i} T_{ji} - \sum_{k>i} T_{ik} + \sum_{j<i} (r_{ij_x} f_{ji_y} - r_{ij_y} f_{ji_x}) - \sum_{k>i} (r_{ik_x} f_{ik_y} - r_{ik_y} f_{ik_x}) - I_i \vartheta_i'(\vartheta_8) \ddot{\vartheta}_8 = I_i \vartheta_i''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \end{cases}$$

Y puesto de forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,73} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,73} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,73} & -m_2 x_2'(\vartheta_8) \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4,73} & -m_2 y_2'(\vartheta_8) \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{5,73} & -I_2 \vartheta_2'(\vartheta_8) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -I_8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{74,1} & a_{74,2} & \cdots & a_{74,73} & -I_{13} \vartheta_{13}'(\vartheta_8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{12x} \\ f_{12y} \\ \vdots \\ \cdot \\ f_{10',12y} \\ \ddot{\vartheta}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ m_2 x_2''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \\ m_2 g + m_2 y_2''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \\ I_2 \vartheta_2''(\vartheta_8) \dot{\vartheta}_8^2 \\ \vdots \\ T_{8,14} \\ \vdots \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$[A(\text{coeficientes})][F(\text{fuerzas}, \ddot{\vartheta}_8)] = [I(\text{inercias})] \Rightarrow [F] = [A]^{-1} \cdot [I]$$

Con este sistema ya se tiene planteada la dinámica de un momento concreto en función de la derivada segunda del ángulo ($\ddot{\theta}_8$) y de su condición inicial. Al resolver este sistema, se puede calcular la nueva posición del ángulo (θ_8) y velocidad angular ($\dot{\theta}_8$) y utilizar el resultado obtenido como nueva condición inicial y así iterar y resolver el problema dinámico directo a lo largo del paso entero.

Para nuestro caso se ha tomado las siguientes aproximaciones de velocidad y aceleración para la iteración

$$\begin{cases} x_i'(\vartheta_8) = \frac{1}{\Delta \vartheta_8} (x_i(\vartheta_8 + \Delta \vartheta_8) - x_i(\vartheta_8)) \\ x_i''(\vartheta_8) = \frac{1}{(\Delta \vartheta_8)^2} (x_i(\vartheta_8 + 2 \cdot \Delta \vartheta_8) - 2 \cdot x_i(\vartheta_8 + \Delta \vartheta_8) + x_i(\vartheta_8)) \\ y_i'(\vartheta_8) = \frac{1}{\Delta \vartheta_8} (y_i(\vartheta_8 + \Delta \vartheta_8) - y_i(\vartheta_8)) \\ y_i''(\vartheta_8) = \frac{1}{(\Delta \vartheta_8)^2} (y_i(\vartheta_8 + 2 \cdot \Delta \vartheta_8) - 2 \cdot y_i(\vartheta_8 + \Delta \vartheta_8) + y_i(\vartheta_8)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_i'(\vartheta_8) = \frac{1}{\Delta\vartheta_8} (\vartheta_i(\vartheta_8 + \Delta\vartheta_8) - \vartheta_i(\vartheta_8)) \\ \vartheta_i''(\vartheta_8) = \frac{1}{(\Delta\vartheta_8)^2} (\vartheta_i(\vartheta_8 + 2 \cdot \Delta\vartheta_8) - 2 \cdot \vartheta_i(\vartheta_8 + \Delta\vartheta_8) + \vartheta_i(\vartheta_8)) \end{cases}$$

El incremento de tiempo entre punto y punto se ha considerado constante e impuesto por nosotros, dependiendo de la precisión que se quiera obtener. Con este incremento de tiempo después de haber despejado $(\ddot{\theta}_8)$ se puede obtener (θ_8) y $(\dot{\theta}_8)$ del nuevo punto a iterar con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vartheta[t] &= \dot{\vartheta}_8[t] + \ddot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t; \vartheta_8[t + \Delta t] = \vartheta_8[t] + \dot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t^2 \\ \dot{\vartheta}_8[t + \Delta t] &= \dot{\vartheta}_8[t] + \ddot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t; \vartheta_8[t + \Delta t] = \vartheta_8[t] + \dot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vartheta}_8 \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

Repitiendo este análisis de forma iterativa tantas veces como precisión se desee se obtiene la dinámica directa dada para unas condiciones iniciales a lo largo de un paso.

3.10. Dinámica con deslizamiento del PASIBOT

En este capítulo, se plantea la posibilidad de deslizamiento del pie de apoyo añadiendo un nuevo grado de libertad: el mecanismo pasa de ser desmodrómico (un solo grado de libertad) a tener dos grados de libertad.

En el análisis se quiere determinar si desliza o no el pie de apoyo, y si desliza calcular cuánto y en qué dirección. Para resolver esto se deberá modificar el sistema de ecuaciones, tanto en la dinámica inversa como directa.

En este capítulo se mostrará simultáneamente como cambian las ecuaciones con deslizamiento tanto en dinámica inversa como directa.

En la Figura 45 se muestra un esquema con las fuerzas que actúan sobre el pie de apoyo (donde ocurre el posible deslizamiento) incluyendo la fuerza de rozamiento. La fuerza que ejerce el suelo sobre el pie, f_{01} , se descompone en su proyección normal, f_{01y} , y tangencial, f_{01x} (fuerza de rozamiento).

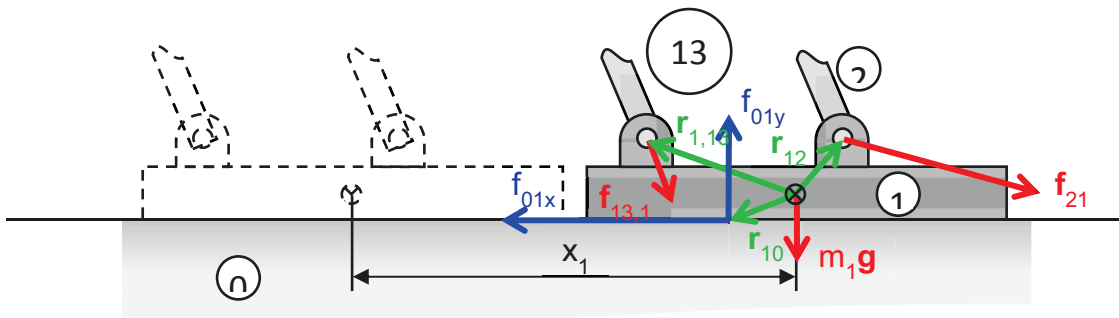


Figura 45. Esquema de fuerzas que actúan sobre el pie de apoyo.

Con respecto al rozamiento podemos distinguir tres posibles situaciones: que la suma de las componentes x de las fuerzas sobre el pie, excluida la del rozamiento, sea inferior a la máxima fuerza de rozamiento estática disponible (rozamiento estático, μ_e), que dicho valor máximo sea alcanzado (deslizamiento inminente) o que el pie ya esté deslizando (rozamiento dinámico, μ_d).

Estados posibles:

- **Pie fijo, ROZAMIENTO ESTÁTICO:**

$$|f_{01x}| \leq \mu_e |f_{01y}|$$

- **Pie a punto de deslizar,**

$$|f_{01x}| > \mu_e |f_{01y}|$$

DESLIZAMIENTO INMINENTE:

- **Pie deslizando, ROZAMIENTO DINÁMICO:**

$$f_{01x} = \pm \mu_d f_{01y}$$

El primer caso, al cual llamaremos pie fijo, se producirá cuando la máxima fuerza de rozamiento sea mayor que la suma del resto de fuerzas en su componente x , con lo cual, el pie de apoyo no desliza.

El siguiente caso, llamado deslizamiento inminente, tiene lugar cuando las fuerzas en su proyección en x alcanzan el valor de la fuerza de rozamiento máxima: a partir de este momento, el pie inicia su deslizamiento acelerando al resto del mecanismo.

Y el tercer caso, posterior al segundo caso, con lo cual, la fuerza de rozamiento será siempre la fuerza de rozamiento dinámica máxima y la diferencia entre las fuerzas en componente x y la fuerza de rozamiento dinámica proporcionará la aceleración del pie de apoyo.

A continuación se muestran las ecuaciones de los tres estados:

Para el estado de pie fijo, rozamiento estático, las ecuaciones son las mismas que en el capítulo 3.7 si estamos despejando la dinámica inversa. O el capítulo 3.9 si es dinámica directa. Se trata de un mecanismo desmodómico.

Las ecuaciones en el caso de deslizamiento inminente, y pie deslizando, son las mismas salvo la dirección de la fuerza de rozamiento (signo de μ_d) y la velocidad del pie de apoyo (en deslizamiento inminente $\dot{x}_1 = 0$). En estos casos al añadir un eslabón más, el pie de apoyo y sus consiguientes ecuaciones a la matriz de coeficientes, el sistema cambia como se muestra seguidamente, pasando a tener un grado más de libertad y una ecuación nueva.

Esta ecuación nueva tiene en cuenta la fuerza que ejerce el suelo sobre el pie, f_{01} , que se descompone en su proyección normal, f_{01y} , y tangencial, f_{01x} (fuerza de rozamiento).

El superíndice pf es para indicar que esas variables tienen el mismo valor que en el estado de “pie fijo”. De esta manera, la posición de un eslabón i del PASIBOT con deslizamiento se representará así:

$$x_i = x_i^{pf} + x_1$$

Donde, x_i es la posición del eslabón i con deslizamiento. x_i^{pf} es la posición que tendría el eslabón i si no hubiera habido deslizamiento. x_1 es el deslizamiento que ha sufrido el eslabón 1, (pie de apoyo), y por consecuencia, todo el PASIBOT.

Las ecuaciones en forma matricial son expresadas a continuación, tanto si se está resolviendo un sistema de dinámica inversa como directa:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j<i} f_{ji_x} - \sum_{k>i} f_{ik_x} - m_i \ddot{x}_1 &= m_i \ddot{x}_i^{pf} \\ \sum_{j<i} f_{ji_y} - \sum_{k>i} f_{ik_y} &= m_i g + m_i \ddot{y}_i \\ \sum_{j<i} T_{ji} - \sum_{k>i} T_{ik} + \sum_{j<i} (r_{ij_x} f_{ji_y} - r_{ij_y} f_{ji_x}) - \sum_{k>i} (r_{ik_x} f_{ik_y} - r_{ik_y} f_{ik_x}) &= I_i \ddot{\theta}_i \\ f_{01x} &= \pm \mu_d f_{01y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Dinámica inversa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,73} & -m_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,73} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,73} & -m_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{71,1} & a_{71,2} & \cdots & a_{73,73} & 0 \\ \hline 1 & \pm \mu_k & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{12x} \\ f_{12y} \\ \vdots \\ T_8 \\ \vdots \\ f_{10',12'y} \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ m_2 \ddot{X}_2 \\ m_2 g + m_2 \ddot{y}_2 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ I_{12'} \ddot{\theta}_{12'} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A(\text{coeficientes})][F(\text{fuerzas}, T_8, \ddot{x}_1)] = [I(\text{inercias})] \Rightarrow [F] = [A]^{-1} \cdot [I]$$

Dinámica directa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,73} & 0 & -m_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,73} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,73} & -m_2 x_2^{pf'}(\theta_8) & -m_2 \\ a_{41} & a_{42} & \cdots & a_{4,73} & -m_2 y_2'(\theta_8) & 0 \\ a_{51} & a_{52} & \cdots & a_{5,73} & -I_2 \theta_2'(\theta_8) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -I_8 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{74,1} & a_{74,2} & \cdots & a_{74,73} & -I_{13'} \theta_{13'}(\theta_8) & 0 \\ \hline 1 & \pm \mu_d & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{01x} \\ f_{01y} \\ f_{12x} \\ f_{12y} \\ \vdots \\ f_{10',12'y} \\ \ddot{\theta}_8 \\ \ddot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 g \\ m_2 x_2^{pf''}(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 \\ m_2 g + m_2 y_2''(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 \\ I_2 \theta_2''(\theta_8) \dot{\theta}_8^2 \\ \vdots \\ T_{8,14} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A(\text{coeficientes})][F(\text{fuerzas}, \ddot{\theta}_8, \ddot{x}_1)] = [I(\text{inercias})] \Rightarrow [F] = [A]^{-1} \cdot [I]$$

Donde, como explica el esquema de la Figura 45, se añade la ecuación $f_{01x} = \pm \mu_d f_{01y}$, en la cual el símbolo de μ_d depende de la velocidad de

deslizamiento anterior. Esta ecuación nos permite calcular la fuerza tangencial que sufre el pie de apoyo y si desliza, su aceleración.

Sabiendo la aceleración del pie de apoyo, \ddot{x}_1 , y en el caso de que estuviera deslizando, la velocidad que tenía, $\dot{x}_1[t]$, es fácil calcular la nueva velocidad, $\dot{x}_1[t + \Delta t]$, y posición, $x_1[t + \Delta t]$, para el siguiente punto a calcular:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1[t + \Delta t] &= \dot{x}_1[t] + \ddot{x}_1 \cdot \Delta t \\ x_1[t + \Delta t] &= x_1[t] + \dot{x}_1[t] \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{x}_1 \cdot \Delta t^2\end{aligned}$$

Habiendo obtenido la aceleración, velocidad y posición del pie de apoyo en el siguiente estado, se calculan para todos los eslabones restantes ($i \neq 1$) las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración como se muestra en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_i[t + \Delta t] &= x_i^{pf}[t + \Delta t] + x_1[t + \Delta t] \\ \dot{x}_i[t + \Delta t] &= \dot{x}_i^{pf}[t + \Delta t] + \dot{x}_1[t + \Delta t] \\ \ddot{x}_i[t + \Delta t] &= \ddot{x}_i^{pf}[t + \Delta t] + \ddot{x}_1\end{aligned}$$

Donde la posición, velocidad y aceleración con respecto al pie fijo ($x_i^{pf}[t + \Delta t]$, $\dot{x}_i^{pf}[t + \Delta t]$, $\ddot{x}_i^{pf}[t + \Delta t]$), son obtenidas realizando el cálculo como si el pie de apoyo estuviera inmóvil. Es decir, calculadas con las mismas ecuaciones que en el capítulo 3.7 (si se tratara de dinámica inversa) o en el capítulo 3.9 (para dinámica directa). A estas posiciones, velocidades y aceleraciones con respecto al pie fijo se les suma la componente debida al deslizamiento del pie de apoyo y se obtiene la posición, velocidad y aceleración del PASIBOT con deslizamiento.

A continuación se muestra el algoritmo que se ha utilizado (Figura 46). Primero se ve si estamos en el caso uno o dos: si estamos en el primer caso, se calcula como la dinámica simple sin deslizamiento, y en el momento que estemos en el segundo caso, se añade las ecuaciones nuevas y se calcula el nuevo sistema teniendo en cuenta el deslizamiento y la nueva aceleración que sufre el PASIBOT. En el caso de deslizar, se calcula en el siguiente estado, y puede ser que siga deslizando, caso tres, o que se pare, con lo cual se volvería al caso uno. [22]

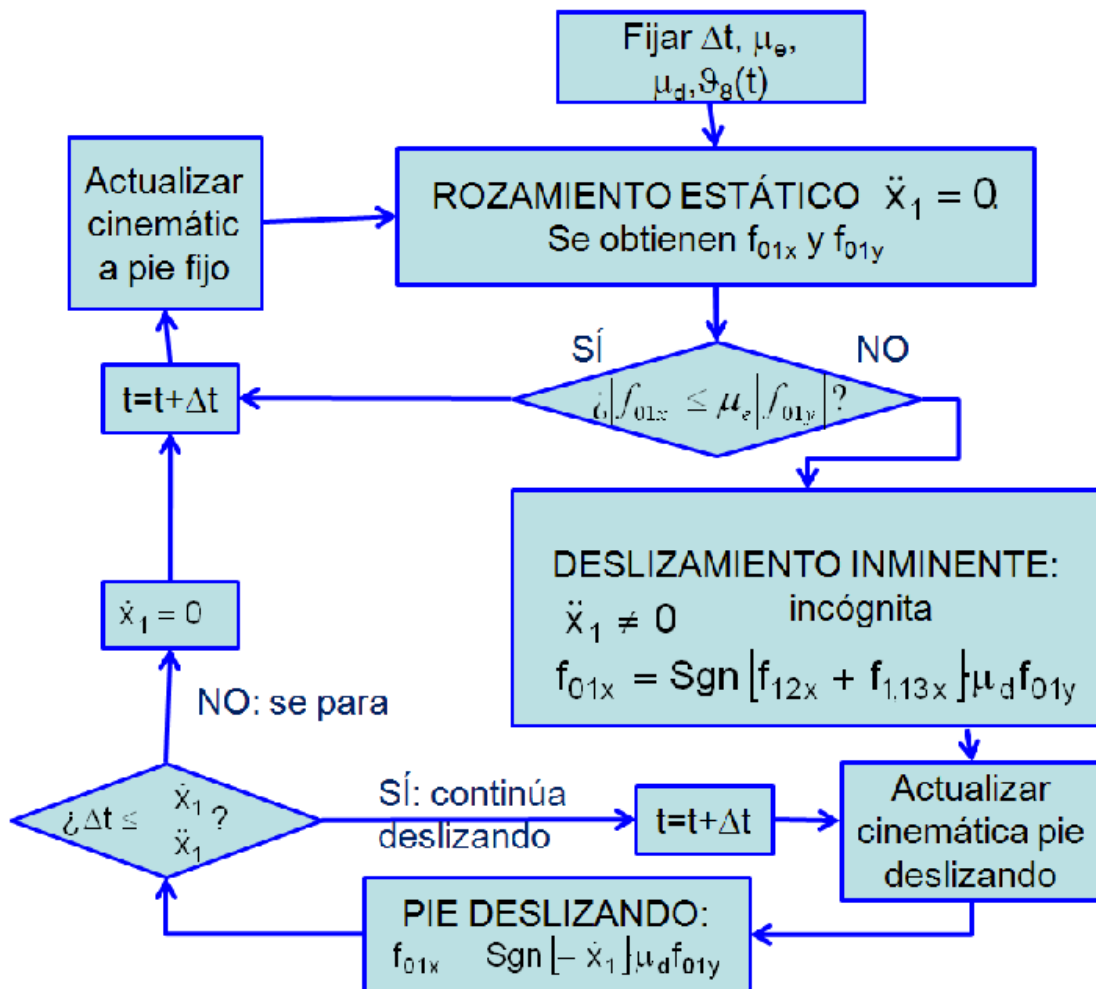


Figura 46: Algoritmo con posibilidad de deslizamiento.

3.11. Doble apoyo

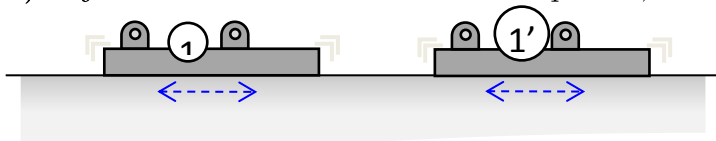
Es importante destacar que en la fase en la que los dos pies están en el suelo, hay un movimiento longitudinal relativo entre ellos, ya que el giro del motor es pequeño pero no despreciable. En la fase de doble apoyo hay que considerar dos nuevas incógnitas provenientes de la fuerza que ejerce el suelo sobre el segundo pie: $f_{01'x}$, $f_{01'y}$.

Para este estudio habría que tener en cuenta que puede darse tres situaciones fases diferentes. De hecho se darán sucesivamente y en el mismo orden, dada la transferencia de fuerza normal de atrás: desde el pie que ya estaba apoyado hacia el pie que acaba de entra en contacto con el suelo.

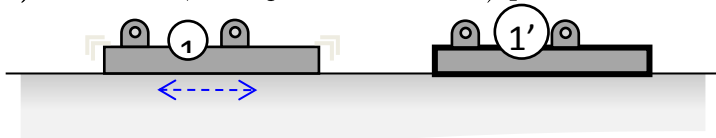
a) 1 fijo, 1' desliza: sistema estático para 1, con $f_{01'x} = \pm \mu_d f_{01'y}$



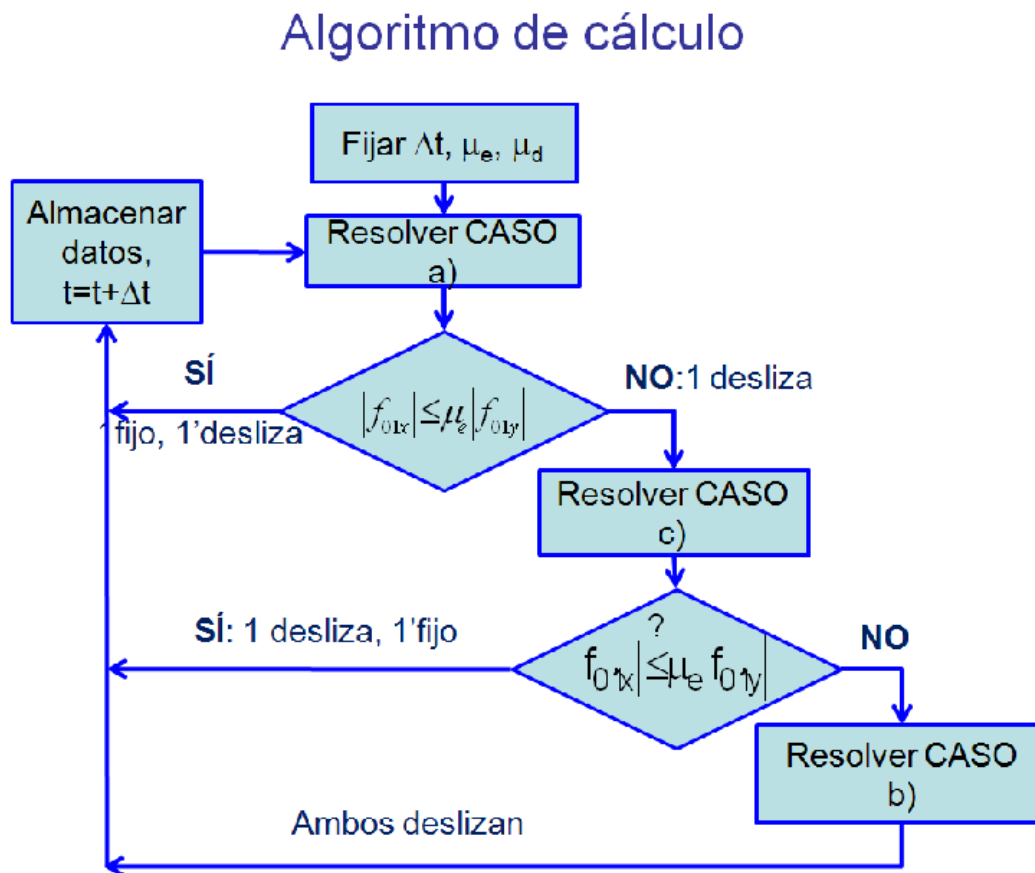
b) 1 y 1' deslizan: sistema dinámico para 1, con $f_{01'x} = \pm \mu_d f_{01'y}$



c) 1 desliza, 1' fijo: como caso a) permutando $1 \leftrightarrow 1'$



También comentar que este movimiento relativo seguramente sea obviado por las holguras internas y genere ciertas tensiones. Pero en el caso de ser estudiado de forma ideal se utilizaría este algoritmo:



3.12. Degeneraciones del PASIBOT

Una de las propuestas que se analizaron en el diseño del PASIBOT fue modificar el sistema de la corredera, convirtiéndola en una doble corredera para así lograr que el pie del aire siempre fuera paralelo al suelo evitando el contacto prematuro con la puntera y/o talón. Esto se muestra en la Figura 47 .

Para este modelo se ha desarrollado un programa para el PASIBOT modificado con corredera-doble, del cual se puede obtener todos los resultados en dinámica inversa con el pie fijo. Para estas modificaciones solo hay que cambiar las ecuaciones de los eslabones modificados y por consiguiente la matriz. Los cambios en concreto para este caso son los siguientes:

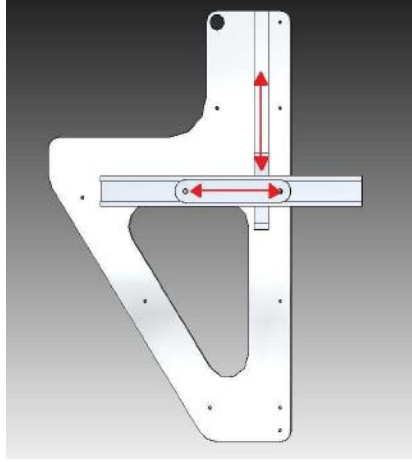


Figura 47: Cadera del PASIBOT modificado con dos correderas

Eslabón10 (estabilizador)

$$f_{310x} - f_{1012x} = m_{10}a_{10x}$$

$$f_{310y} - f_{1012y} = m_{10}g + m_{10}a_{10y}$$

$$r_{103x}f_{310y} - r_{103y}f_{310x} - T_{1011} - r_{1012x}f_{1012y} + r_{1012y}f_{1012x} = I_{10}\alpha_{10} = 0$$

Donde:

$$r_{103} = r_{107} = [r_{103x}, r_{103y}] = [(-l_{10}/2)\cos\theta_{10}, (-l_{10}/2)\sin\theta_{10}] = -r_{1011}$$

$$r_{1012} = [r_{1012x}, r_{1012y}] = [d_{10}\cos\theta_{10}, d_{10}\sin\theta_{10}]$$

La corredera doble no sufre fuerzas.

$$T_{1011} - T_{1114} = I_{11}\alpha_{11} = 0$$

Esta propuesta tiene la gran desventaja de que aumenta las posibilidades de que la corredera se trabase.

3.13. Programa

En este capítulo se explicará brevemente el funcionamiento y las partes de uno de los programas diseñados en esta tesis. Este programa realiza el análisis de la dinámica inversa sin deslizamiento y se muestra completamente en el anexo1 con todos los comandos detallados. Es de destacar que el código del programa es totalmente paramétrico y puede ser fácilmente modificado para obtener otras salidas en función de otras entradas, o variar los valores de los parámetros. En el programa se introduce como entrada la $\theta_s(t)$ (posición angular del motor) conocida y dependiente del tiempo “ t ”, para dar como salida la posiciones, velocidades y aceleraciones de todos los centros de masas de todos los eslabones y todas las fuerzas sufridas entre eslabones más el par motor en tantas divisiones temporales como queramos (en el ejemplo del anexo1 en 10 partes). Los demás programas continúan con el patrón aquí expuesto con sus respectivas variaciones debido a las diferentes cinemáticas, dinámicas y condiciones.

La primera parte del programa consiste en resolver las ecuaciones de cierre y calcular todo los ángulos de los eslabones de la pierna de apoyo del PASIBOT en función de θ_8 ; tal y como se explica en el capítulo “cinemática del PASIBOT”, dividiendo el robot en tres ecuaciones de cierre: Chebyshev, extensión, y estabilización. Véase Figura 48.

Luego, se obtienen los ángulos de los eslabones de la pierna en el aire, que son exactamente las mismas operaciones pero sabiendo que $\theta_i'(\theta_8) = \theta_i'(\theta_8 + \pi)$.

Una vez que se tienen todos los ángulos respecto a la cadera fija, se obtienen respecto al suelo como punto de referencia, para esto se suma a cada ángulo: $\pi - \theta_1$. Destacar que θ_1 es dependiente de θ_8 y a su vez del tiempo, “ t ”.

Una vez calculados todos los ángulos respecto a la referencia deseada, se derivan cada ángulo de cada eslabón una vez para obtener las velocidades angulares y otra para las aceleraciones angulares.

Hasta este momento todos los resultados son simbólicos, aun no se ha sustituido ningún valor y siguen dependiendo de θ_8 , y a su vez θ_8 depende del tiempo. En el siguiente punto del programa, se divide el paso calculando el valor del semi-periodo y dividiéndolo en tantas partes como se quieran (discretización temporal). Para dividir el programa se usará un bucle, el cual se encargará a partir de este punto de repetir las veces deseadas todas las operaciones. Esto significa que para cada momento de tiempo deseado se realizará todo el análisis

completo. En el ejemplo del anexo1 se secciona en 10, pero este dato podría ser aumentado para lograr la precisión que se quiera, con el único inconveniente que se aumenta el tiempo que tarda el programa en dar la solución.

A continuación, se sustituirá en cada división temporal todos los datos sabiendo así las soluciones numéricas de las posiciones, velocidades angulares y aceleraciones angulares de cada centro de masa de cada eslabón.

Se utilizan estos resultados como entrada para un subprograma llamado “matriz”, el cual nos da la matriz del análisis dinámico. Una matriz de dimensiones 73×73 y de rango 73. Esta matriz es la relación de coeficientes entre las fuerzas y los momentos con sus inercias y momentos de inercias. Lo que se quiere calcular son las fuerzas y los momentos, con lo cual, se invierte esta matriz y esto es la salida del subprograma: la inversa de la matriz del análisis dinámico. En el principio del subprograma se realizan los cálculos de todos los vectores posiciones que son necesarios para los coeficientes de las igualdades de momentos y al final del mismo, se realizan unas comprobaciones para verificar que la matriz es correcta.

Ya nos encontramos dentro del bucle con lo cual todas estas operaciones se repetirán tantas veces como se haya fijado para dividir el paso. Con lo cual este subprograma se repetirá en el ejemplo 10 veces dando como resultado 10 matrices y 10 inversas de esa matriz.

Luego se definen las longitudes, masas y momentos de inercia. Con estos datos se calculan, eslabón a eslabón, las velocidades lineales sumando proyecciones, tanto en el eje “x” como el eje “y”, ya que todos los eslabones están unidos y son dependientes. Estas velocidades se dividen en función del tiempo para obtener las aceleraciones lineales de los centros de masas. En medio de estas operaciones se realiza una comprobación para asegurar que los resultados con correctos.

Habiendo calculado las aceleraciones lineales de los centros de masas se puede calcular el vector con las inercias, un vector columna de dimensiones 73×1 , que, si se multiplica por la derecha de la matriz inversa de coeficiente del análisis dinámico, da como resultado las fuerzas y el par motor.

Y con esto ya se ha calculado la solución completa para un instante de tiempo concreto, esto se realizará de forma iterativa hasta completar el paso. [27][28][29][30][31][32][33][34]

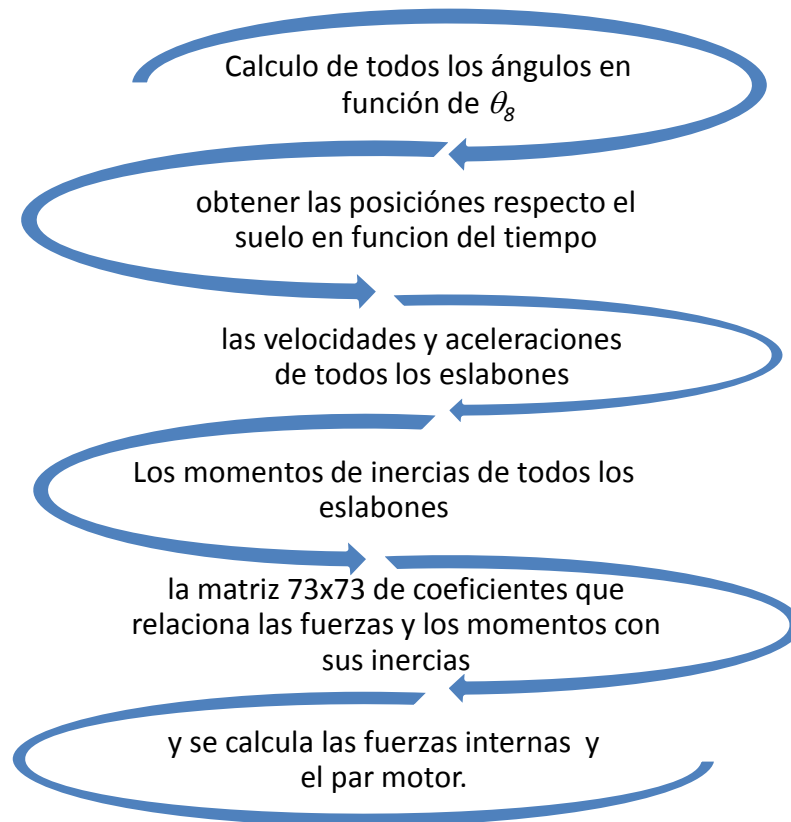


Figura 48: esquema del programa del anexo 1

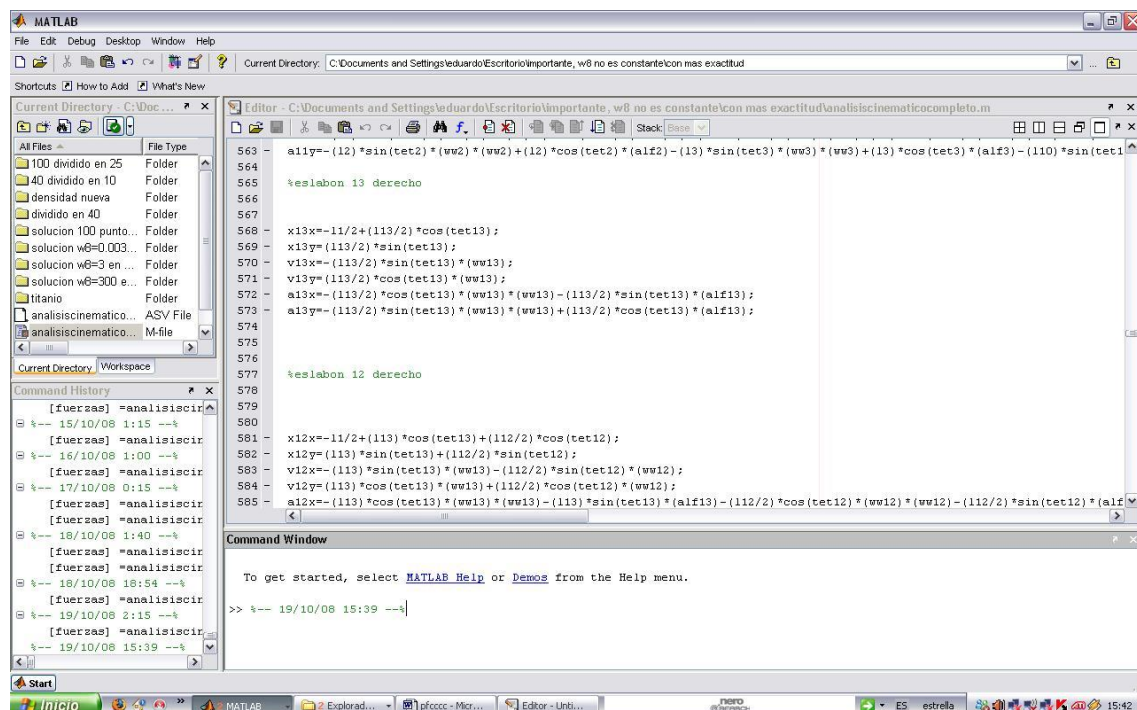


Figura 49: El programa calculando una solución.

Capítulo IV

4. Pruebas y resultados

4.1. Resumen de los resultados:

La gran ventaja de la metodología del “análisis mecánico inteligente” es su posibilidad de variar para realizar diversos estudios diferentes. Esto es debido a que parte de sus dependencias entre su cinemática y a ser totalmente paramétrico. Debido a esto, en este capítulo de la tesis se mostraran muchos resultados de distintos estudios para demostrar la versatilidad de la metodología propuesta. Los resultados mostrados son:

Se comparan con programas de simulación para confirmar que los datos obtenidos son fiables. Mostrando los eslabones más solicitados y el valor de las fuerzas que sufren. De estos análisis se calcula la curva del par motor para dar un paso.

Se mostraran varios análisis de sensibilidad: el par motor, las fuerzas con la variación de la velocidad del motor y el par motor necesario variando la densidad del material y añadiendo pesos extra a la cadera.

Después, las gráficas de cuando empieza a deslizar variando la velocidad del motor o variando los coeficientes de fricción pie-suelo y cuanto desliza. También diferenciando entre coeficiente de fricción estático y dinámico. Esta información es muy útil para obtener el instante preciso que desliza.

Luego, gracias a la dinámica directa, se muestra el ángulo de motor girado en función de un par dado. De esto se obtiene el par mínimo de arranque.

Se muestra también la posibilidad de aplicar el método del “análisis mecánico inteligente” a estudios de resistencia: el análisis de la cadera en ANSYS y sus resultados son expuestos.

Y por último el cálculo del vuelco, balanceo y giro es obtenido. Como las gráficas del ZMP (Zero Moment Point) y su evolución a lo largo de un paso.

4.2. Comparación con Programas de Simulación

En este capítulo se recogen los resultados más importantes obtenidos con el programa de simulación desarrollado en esta tesis comparándolos con los proporcionados con otros programas de simulación comerciales.



Figura 50: prototipo del PASIBOT construido por el grupo de investigación MaqLab.

El programa “Working Model 2D” es una herramienta de CAE que permite crear simulaciones de sistemas mecánicos. Con él calcularemos el análisis de la cinemática y lo compararemos con los resultados analíticos que se han obtenido con el Programa desarrollado en esta tesis.

En la **Figura 51** se ha representado en color azul la pierna derecha y en color rojo la pierna izquierda, los elementos comunes del robot se representan en color gris.

Mediante la utilización del programa “Working Model 2D”, al robot se le ha proporcionado un Motor en el punto que une la Cadera con la Manivela. El Motor permite al robot tener el movimiento de caminar. Además, se ha diseñado para que el motor gire a la velocidad elegida por el usuario. Con esto, se comparará para el mismo valor de w_s los dos resultados.

A continuación, en la Figura 51, se representa el movimiento del robot PASIBOT mediante una serie de capturas de imágenes obtenidas de un video del movimiento, para poder visualizar su movimiento de manera más clara:

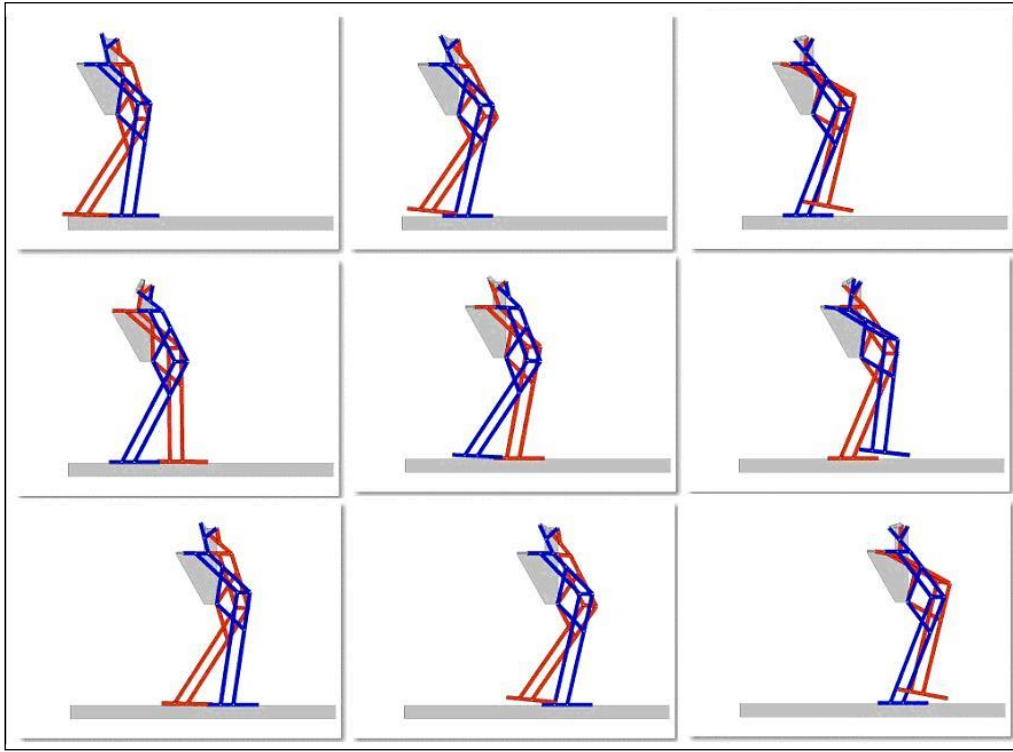


Figura 51: Movimiento del robot PASIBOT generado en Working Model.

Con una serie de comandos, se divide el paso en el programa “Working Model 2D” en el número de puntos que se quiera, y se obtienen los resultados.

A continuación se muestran unas tablas, comparando los resultados del “Working Model 2D” (datos en rosa) y del programa diseñado y desarrollado en esta tesis (datos en amarillo).

Tabla 3: comparativa de las posiciones del centro de masa del eslabón 3:

Programa wm2d		Simulación proyecto desarrollado		tiempo [s]
fémur en el aire eslabón3izq		fémur en el aire eslabón3izq		
posición x[mm]	posición y[mm]	posición x[mm]	posición y[mm]	
31.1773	593.1432	31	593	0.000
52.5448	590.1037	52	590	1,040
79.7902	587.7643	79	588	2,010
114.0674	587.3579	114	587	3,140
147.1692	595.7024	147	596	4,190
157.7657	618.8087	158	619	5,240
146.566	634.2154	146	634	6,280
141.79	634.1078	142	634	7,330
152.811	631.2005	152	631	8,380
176.7046	630.0974	176	630	9,420

Tabla 4: comparativa de las velocidades del centro de masa del eslabón 3:

Programa wm2d	Simulación proyecto desarrollado	tiempo [s]
---------------	----------------------------------	------------

fémur en el aire eslabón3izq		fémur en el aire eslabón3izq		
velocidad x[mm/s]	velocidad y[mm/s]	velocidad x[mm/s]	velocidad y[mm/s]	
22.704	-2.6239	23	-3	1,040
29.6355	-1.7531	29	-2	2,010
34.6824	2.0257	35	2	3,140
24.5609	15.7972	25	16	4,190
-4.7292	23.3391	-5	23	5,240
-10.8798	5.2294	-11	5	6,280
2.8632	-2.9484	3	-3	7,330
17.6541	-1.9905	17	-2	8,380
26.6528	-0.3565	27	-0.35	9,420

La coincidencia es muy alta, con un error relativo medio en las posiciones de valor 0,00798% y un error relativo medio en velocidades del 1,10%. Estos datos validan el programa elaborado en nuestro trabajo. El programa nuestro, estudia el robot en movimiento, lo que justifica que los primeros datos siempre son diferentes. El “Working Model” estudia el paso partiendo del PASIBOT quieto, entonces tiene velocidad y aceleraciones iniciales cero. El programa nuestro sin embargo estudia el robot en movimiento. Ese es el motivo por el que los primeros datos respecto de los primeros dos valores de tiempo no sean iguales. Lo mismo va a ocurrir con las aceleraciones:

Tabla 5: comparativa de las aceleraciones del centro de masa del eslabón 3:

Programa		Simulación		tiempo [s]
fémur en el aire eslabón3izq		fémur en el aire eslabón3izq		
aceleración x[mm/s2]	aceleración y[mm/s2]	aceleración x[mm/s2]	aceleración x[mm/s2]	
5.4723	0.6807	5.0000	0.5110	1,040
7.0973	1.3050	7.0000	1.0000	2,010
0.3590	7.3981	-0.0828	8.0000	3,140
-21.9970	17.1933	-22.0000	16.0000	4,190
-23.3453	-9.6674	-22.0000	-11.0000	5,240
8.3643	-15.5154	8.0000	-15.0000	6,280
15.1223	-1.5980	14.0000	-2.0000	7,330
12.1219	2.0448	11.0000	2.0000	8,380
4.5748	0.7462	4.0000	0.7442	9,420

Solución Dinámica inversa pie fijo para una w_8 constante.

Se han desarrollado los programas de manera paramétrica lo que permite estudiar el PASIBOT en diversas situaciones o incluso realizar un proceso de optimización, lo que no se consigue con otros programas existentes. Dado un valor de la velocidad angular de la manivela motor, w_8 , el PASIBOT tarda en dar un paso un periodo ($T=2\pi/w_8$).

En el programa expuesto en el anexo1 se podría introducir cualquier valor, constante o en función del tiempo, de w_8 . Se exponen las posiciones (coordenada x, coordenada y), velocidades (velocidad sobre x, velocidad sobre y) y aceleraciones (aceleración en x, aceleración en y) de los centros de masas de todos los eslabones. Para su fácil lectura serán mostrados en tablas, y solo los resultados más interesantes.

Tabla 6: Posición de la cadera durante un paso

eslabón: 14		
	posición x	posición y
	-136.8777	657.672
	-116.6888	657.1518
	-93.6035	656.774
	-68.3789	657.0135
	-42.4183	657.469
	-16.8777	657.672
	7.876	657.4991
	32.251	657.1952
	56.8211	657.1205
	81.2786	657.401

Tabla 7: Velocidades en un instante dado

tiempo=2.09s				
eslabón:	pie de apoyo		pie en el aire	
	velocidad x [mm/s]	velocidad y [mm/s]	velocidad x [mm/s]	velocidad y [mm/s]
1	0	0	25.2725	9.5387
2	15.2884	-2.3504	31.0813	4.3366
3	32.7731	-2.3694	29.6355	-1.7531
4	21.8487	-1.5796	28.1705	1.5294
5	30.5768	-4.7008	36.9538	2.0235
6	28.409	-0.8088	32.1511	0.9277
7	25.4603	-2.6946	26.4249	0.593
8	23.226	-0.04	23.226	-0.04
9	24.3431	-1.36	24.8254	0.2837
10	34.9693	-0.038	22.3932	-2.079
11	34.9693	-0.038	32.2064	-10.7731
12	35.88	0.9287	29.6992	1.1358
13	15.2884	-2.3504	31.145	7.2255
14	23.27	-0.0404	23.27	-0.0404

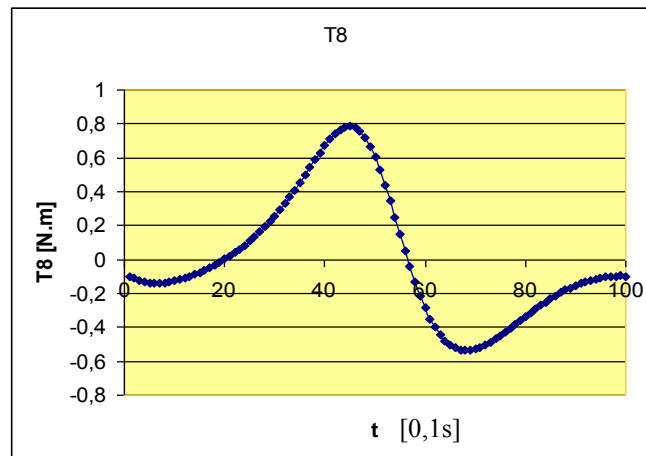
Tabla 8: Aceleraciones en el instante inicial

tiempo=0s				
eslabón:	pie de apoyo		pie en el aire	
	aceleración x	aceleración y	aceleración x	aceleración y
1	0	0	9.72	-1.0286
2	2.5165	-0.7292	7.3614	0.1945
3	4.6186	-1.9249	2.1735	-0.2298
4	3.0791	-1.2833	2.3977	0.8423
5	5.033	-1.4585	5.0028	1.4176
6	3.6417	-1.8374	-0.2746	0.1518
7	2.6679	-3.4714	0.3664	-0.5143
8	1.26	-1.8514	1.26	-1.8514
9	1.9639	-2.5329	0.8132	-1.0543
10	4.2043	-2.3914	-0.6557	-1.8771
11	4.2043	-2.3914	-10.878	-1.7085
12	6.1173	-0.7234	2.1735	-0.2298
13	2.5165	-0.7292	7.3614	0.1945
14	2.0414	-1.8595	2.0414	-1.8595

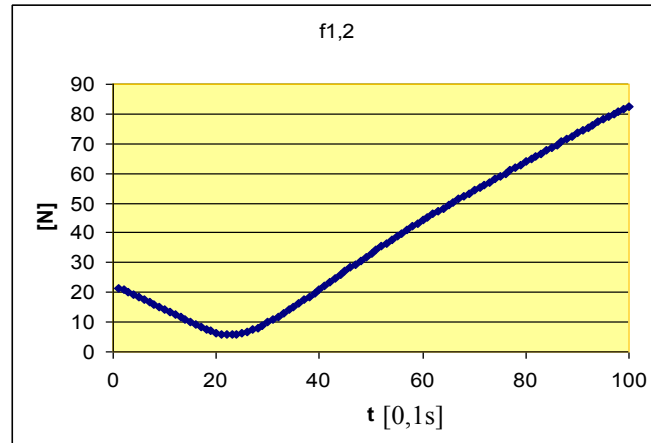
La solución de la dinámica es el conjunto de todas las fuerzas entre eslabones y el par del motor en función del tiempo. Para facilitar su comprensión y estudio, se representa en gráficas. En el eje “y” el valor de las fuerzas en Newton [N], o pares en Newton-metro [Nm] y en el eje “x” el tiempo, donde se dividen los diez segundo del semi-periodo en 100 partes iguales.

Las gráficas son representaciones de 100 puntos calculados con el “programa” creado para esta tesis. Como cada semi-periodo, avance de un pie, para la velocidad angular de 0,3 rad/s son aproximadamente 10 segundos, cada unidad de tiempo en el gráfico es equivalente a 0,1s.

Primero empezaremos con la gráfica 1 del par que debe suministrar el motor para obtener un w_s constante e igual a 0.3 rad/s en un semi-periodo que dura diez segundos:



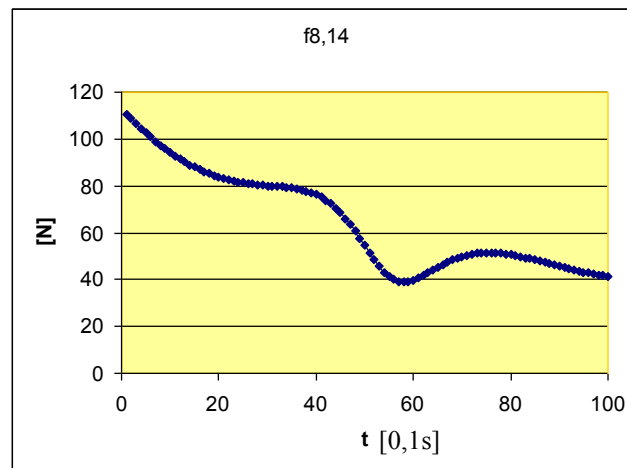
gráfica 1: par que el motor proporciona a la manivela en función del tiempo [0,1s].



gráfica 2: fuerza que ejerce el eslabón1 sobre el eslabón 2.

La gráfica 2 muestra la fuerza transmitida a la tierra (eslabón1) por el pie en el suelo (eslabón 2) en función del tiempo [0,1s]. La relación entre su componente horizontal y vertical es el coeficiente mínimo que tiene que tener el coeficiente de rozamiento estático en el contacto suelo-pie para no deslizar.

La fuerza f_{814} tiene el valor de fuerza absoluta ($\sqrt{(f_x^2 + f_y^2)}$) máxima registrada para esta $w_8=0.8\text{rad/s}$ y es el valor de $f_{814(\text{máxima})}=110,78\text{ N}$. Lo que convierte a esta articulación en la más crítica desde el punto de vista resistente.

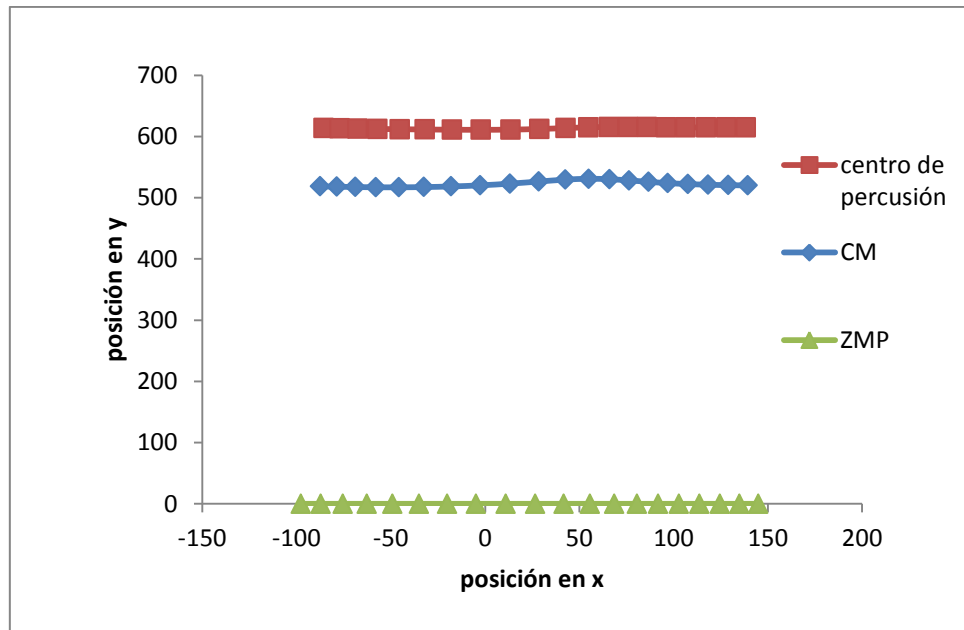


gráfica 3: fuerza que ejerce el eslabón8 sobre el eslabón 14 en función del tiempo.

Este resultado no sorprende, ya que se trata de la articulación motorizada del bípedo (el motor está acoplado a la manivela, eslabón 8).

De hecho, las dos fuerzas mayores obtenidas, son las dos del eslabón 8. La mayor es con el eslabón 14 (la cadera) y la siguiente con el eslabón 7. Tiene sentido que la fuerza máxima sea con la cadera, ya que está resistiendo el par que ejerce el motor y está transmitiendo y soportando todo el peso del pie en el aire.

En la gráfica 4 se muestran las posiciones del centro de percusión, centro de masas y ZMP (zero momento point) del PASIBOT durante un paso. Se observa como el centro de masas se desplaza de atrás a delante, siendo el punto (0,0) el centro del pie de apoyo, y como, sin embargo su variación en las coordenadas y es muy pequeña. El ZMP nos da la información de la superficie que debe tener el pie de apoyo para no producirse el vuelco, ya que mientras el ZMP esté dentro de la superficie de apoyo el PASIBOT estará en equilibrio.



gráfica 4: posiciones del centro de percusión, centro de masa y ZMP del PASIBOT durante un paso.

Cada gráfica podría ser estudiada independientemente para saber dónde están los puntos más peligrosos e interesantes y para saber cómo deberían ser diseñados cada eslabón y articulación para maximizar la eficiencia y minimizar los rozamientos, minimizar solicitaciones, etc.

4.3. Variando parámetros para la solución Dinámica inversa pie fijo para una w_8 concreta y constante.

En esta sección se mostrarán resultados obtenidos aplicando el programa a distintas propuestas realizadas a fin de optimizar la construcción del robot PASIBOT. Para ello se han variado los parámetros que se han considerado de mayor interés:

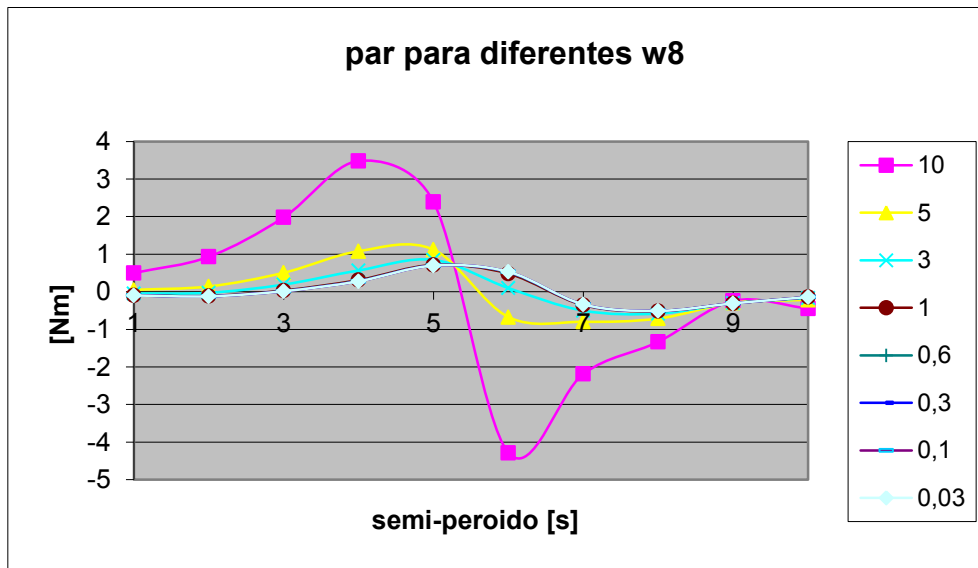
- 1) Sensibilidad del par motor a la variación de w_8 .
- 2) Sensibilidad de las fuerzas a la variación de w_8 .
- 3) Sensibilidad del par motor a la variación de densidad de los eslabones.
- 4) Sensibilidad del par motor a la variación del peso extra de la cadera.

El par en función de w_8 .

En par que debe ejercer el motor claramente es una información clave en el diseño y el análisis del bípodo. La magnitud del par y su variación influirán directamente en la forma del caminar del PASIBOT, y en su estabilidad, así como en las fuerzas sufridas por los eslabones y en los valores de las fuerzas de inercia. Además, influirá indirectamente en el tamaño del motor, en la resistencia de la cadera para soportar el motor, la batería y su peso, en las horas de autonomía, el ruido y las vibraciones, etc...

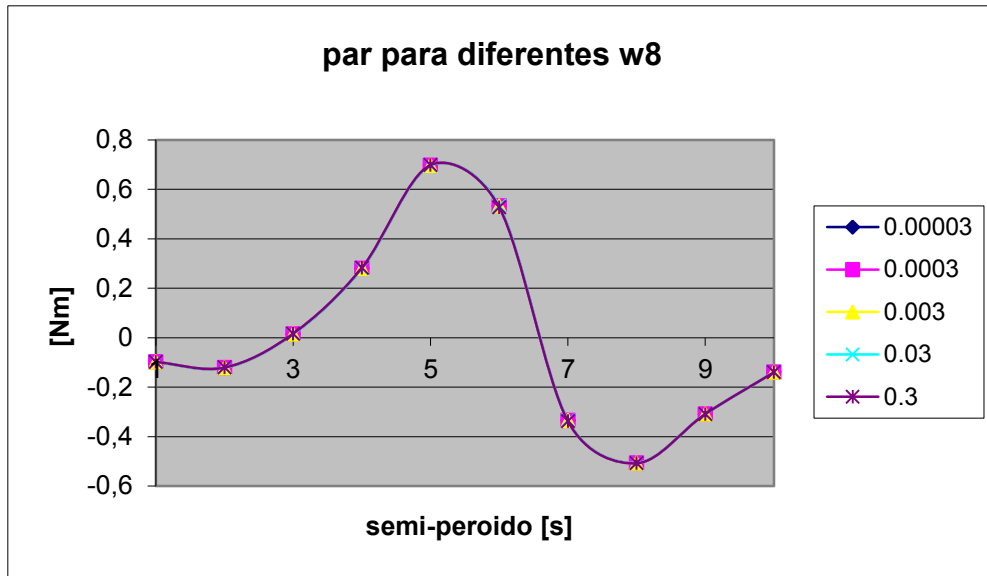
A continuación se muestran las gráficas del par para diferentes velocidades angulares del motor.

En la gráfica 5 se muestran las gráficas del par motor para distintas velocidades de rotación de la manivela motor w_8 . Se observa que la demanda de par aumenta con la velocidad por encima de $w_8=3$ rad/s mientras que por debajo de dicho valor las curvas de par apenas varían de una velocidad a otra. La conclusión es que para velocidades de giro altas, las inercias de los eslabones predominan sobre sus pesos mientras que por debajo de $w_8=0,3$ rad/s las fuerzas de inercia son despreciables frente a los pesos y el par es prácticamente el de equilibrio en cada posición (régimen cuasi-estático).



gráfica 5: el par del motor para cinco valores diferentes de w_8 .

En la gráfica 6 se puede observar como las curvas de par para velocidades de la manivela motor muy bajas son prácticamente iguales, régimen cuasi-estático. Se aprecia claramente que por debajo de $w_8=0.3$ rad/s las fuerzas de inercia son casi despreciables.

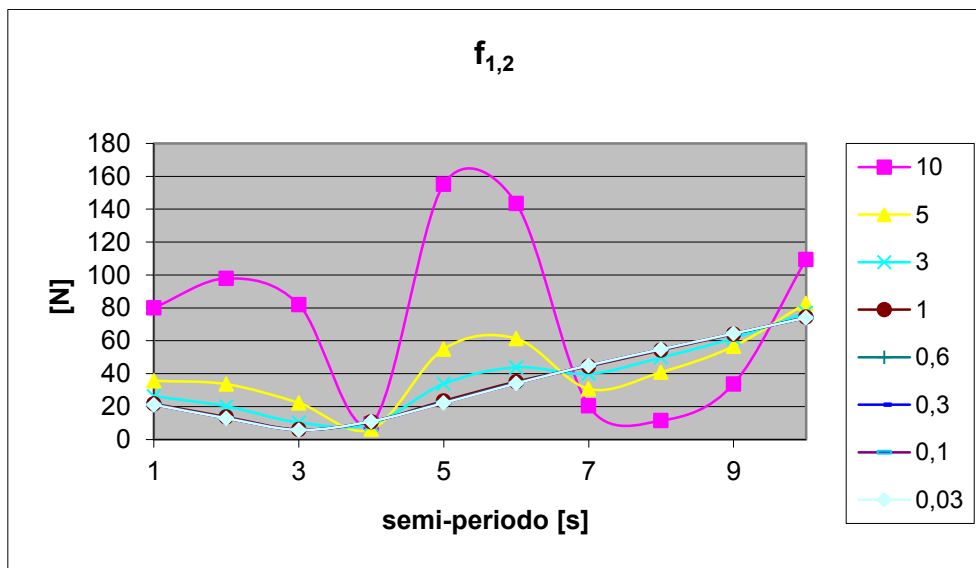


gráfica 6: el par del motor para valores muy bajos de w_8 .

Fuerzas en función de w_8 .

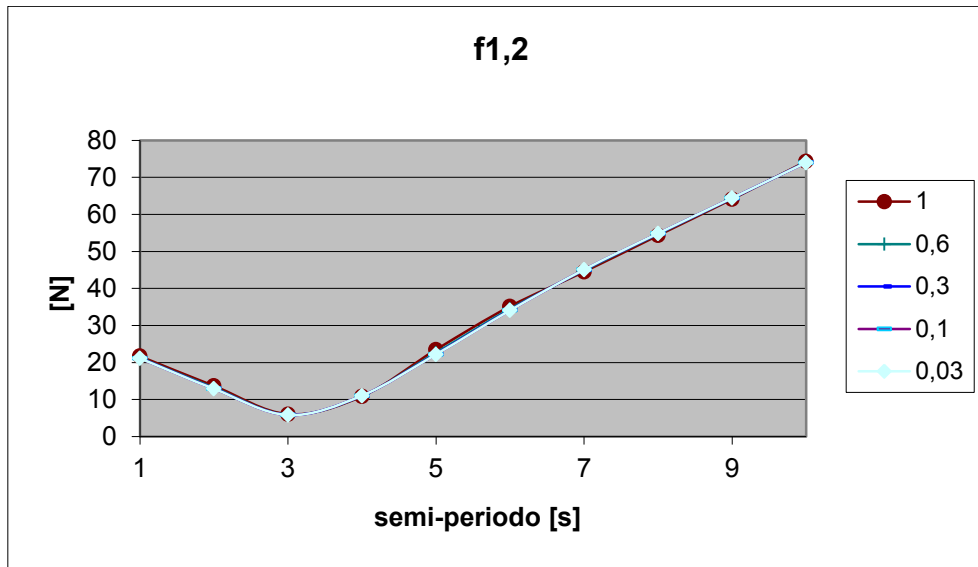
Como se ha efectuado con el par, se estudiará la variación de las fuerzas más importantes y significativas en función del valor de w_8 deseado.

En la **gráfica 7** se aprecia cómo el módulo de la fuerza $f_{1,2}$, fuerza entre el suelo y el pie de apoyo, varía a medida que aumenta w_8 . Se aprecia que tiene un máximo absoluto cerca de la mitad del paso seguido de una disminución brusca, debido a que en ese punto el PASIBOT realiza el mayor esfuerzo y una vez superado empieza a desacelerar. Esta forma es más apreciable cuando mayor son las w_8 , ya que como se vio en el apartado anterior, cerca del umbral de $w_8=3\text{rad/s}$ las fuerzas de inercia son claramente superiores a los pesos y por debajo de $w_8=0.3\text{ rad/s}$ las fuerzas de inercia son despreciables.



gráfica 7: la fuerza $f_{1,2}$ con nueve valores diferentes de w_8 .

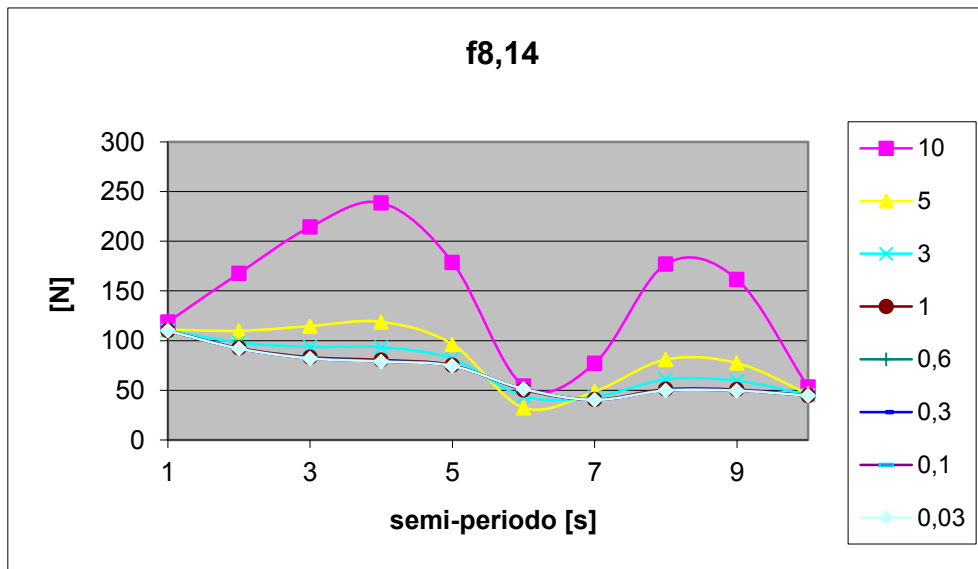
Como se muestra en la **gráfica 8**, por debajo del valor umbral, los pesos predominan sobre las inercias y la fuerza entre el suelo y el pie es casi igual independiente de la w_8 .



gráfica 8: la fuerza f_{12} con cinco valores muy bajos de w_8 .

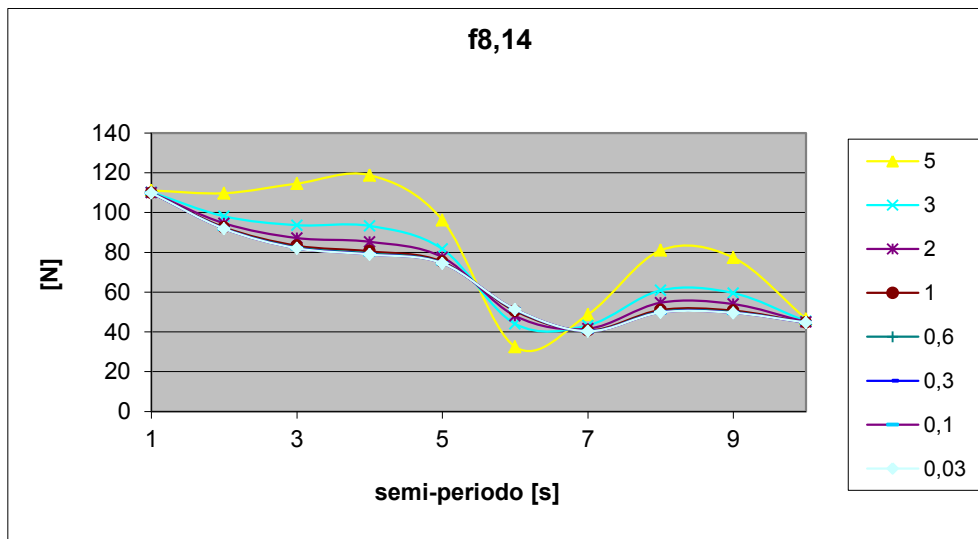
En la gráfica 9 se muestra la fuerza más relevante ya que sufre los valores más altos en función de diferentes w_8 . Esta fuerza es la $f_{8,14}$, la fuerza sufrida entre la manivela motor y la cadera.

Se observa que sigue el mismo patrón: a velocidades altas la gráfica es diferente que a velocidades pequeñas (las velocidades angulares “umbrales” son las mismas).



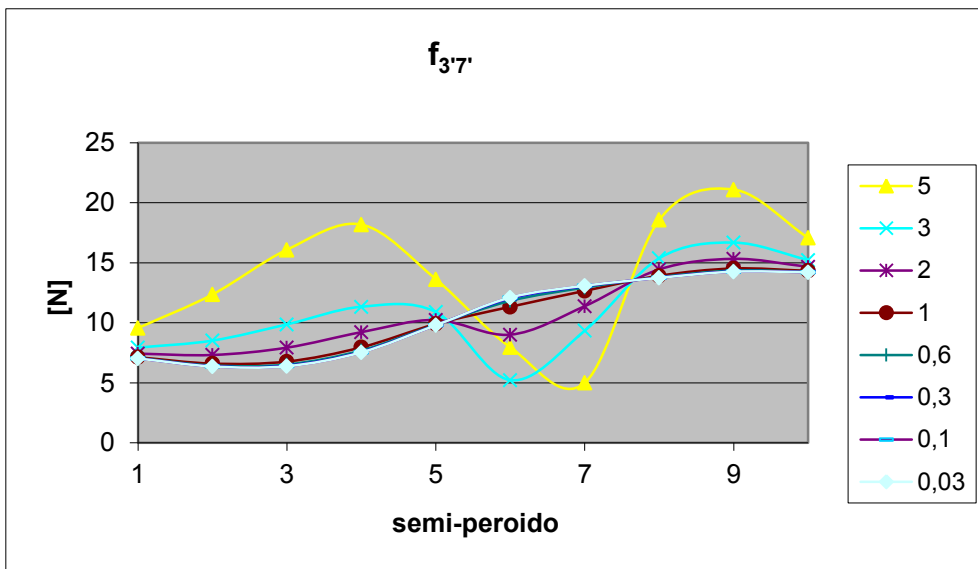
gráfica 9: la fuerza $f_{8,14}$ para diferentes valores de w_8 .

En la gráfica 10 se muestra un zoom de la gráfica 9 pudiendo apreciar como la fuerza $f_{8,14}$, varía su forma al acercarse al punto “umbral”, y por lo tanto, a sus valores cuasi-estáticos.



gráfica 10: la fuerza $f_{8,14}$ con ocho valores diferentes de w_8 .

En la gráfica 11 se muestra los valores de la fuerza entre el fémur y la biela del pie en el aire, $f_{3,7'}$. Se puede observar respecto a las otras que los valores de fuerza son menores a iguales w_8 y que también es fácil apreciar el punto umbral donde las inercias son despreciables.



gráfica 11: la fuerza $f_{3,7'}$ para diferentes valores de w_8 .

PASIBOT de titanio.

Todos los cálculos realizados anteriormente son para un PASIBOT de aluminio.

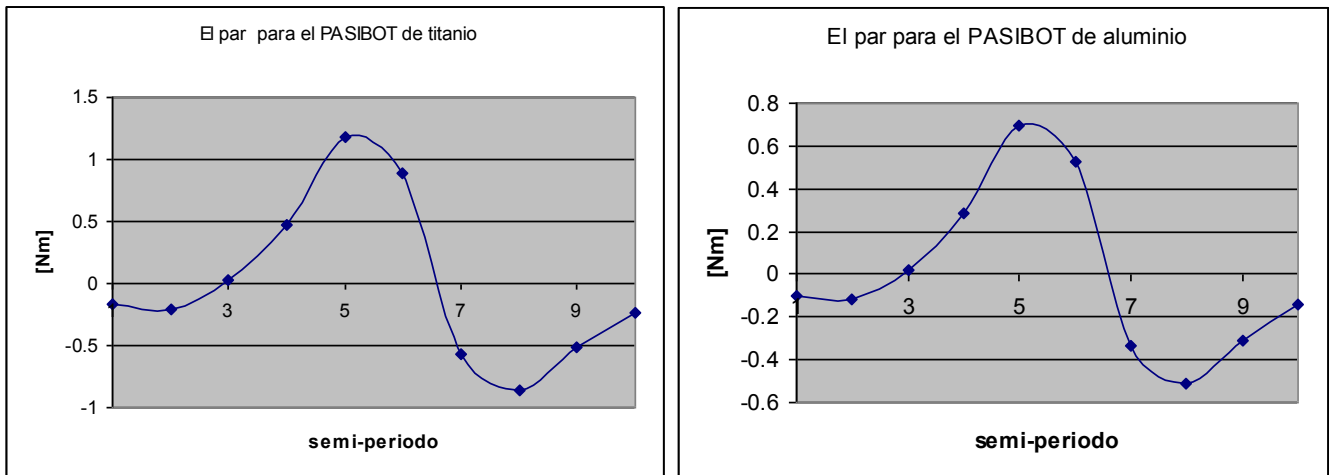
El aluminio tiene una densidad de 2.7 g/cm³.

En este apartado se mostraran los resultados de un PASIBOT de titanio, con una densidad de 4.54 g/cm³.

Al variar las densidades, con u_8 constante, el tiempo del paso, y las posiciones y velocidades son iguales. Sin embargo las fuerzas y el par varían. En la gráfica 12 se puede ver como es el par para el PASIBOT de titanio y para el PASIBOT de aluminio.

Se puede observar que el PASIBOT de titanio al tener mayor densidad pesa más y necesita más par y sufre fuerzas mayores que el PASIBOT de aluminio.

La fuerza máxima registrada por el PASIBOT de titanio es 184,8572N y la fuerza máxima del PASIBOT de aluminio es de 109,8682 N.



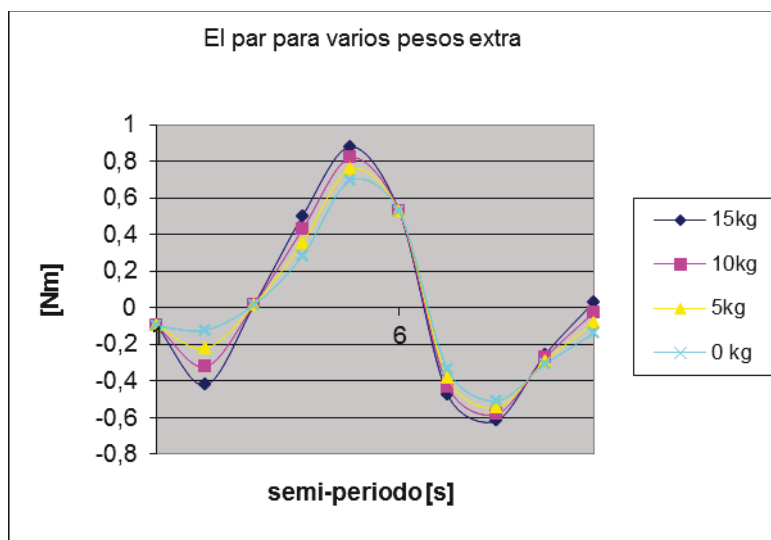
gráfica 12: El par para el PASIBOT de titanio y de aluminio en función del tiempo[s]

Añadiendo peso a la cadera.

Este capítulo es un análisis de sensibilidad al añadir peso a la cadera. Esto es un punto importante en la elección del motor, las baterías y el peso que puede cargar el bípodo.

Se añade una masa extra a la cadera debido a un hipotético motor y una batería. La carga en la cadera no influye demasiado en la demanda de par puesto que el movimiento de la cadera es prácticamente de traslación con velocidad uniforme a lo largo de paso.

Por el contrario, el valor de la carga si influye en la fuerza máxima que soporta el eslabón más solicitado, así como en las tuerzas máximas de los eslabones de la pierna de apoyo. El peso extra se supone que estaría en el centro de masas de la cadera. En la gráfica 13 se muestra el par necesario para que el PASIBOT ande con diferentes pesos extra: 0 kg sin peso, con 5 kg, con 10kg y con 15 kg extra.



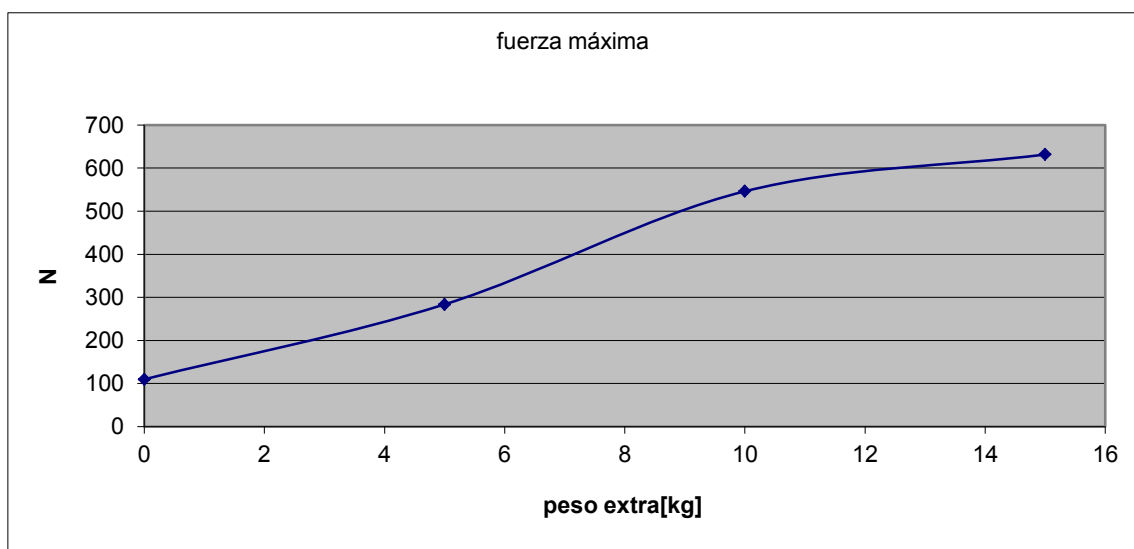
gráfica 13: El par para el PASIBOT con varios pesos extra.

Se puede observar que el par para moverse con 5kg extra es ligeramente mayor que sin ese peso. La fuerza máxima que sufre (Fuerza máxima= 283,7567 N) aumenta notablemente añadiendo 5kg de masa con respecto a la fuerza sin peso extra (Valor de la fuerza máxima sin peso extra=109,8682 N)

Con un peso extra de 10 kg se aprecia una subida moderada del par del motor, y la fuerza máxima sufrida (fuerza máxima sufrida con 10Kg extra= 457,657N) casi duplica a la fuerza con 5Kg extra y es cuatro veces la fuerza sin peso extra.

Con 15 kg extra se observa que el par sigue aumentando de forma proporcional y lineal con valores no muy grandes. Y las fuerzas sufridas, en concreto el valor máximo detectado, aumentan de forma también lineal de una manera más pronunciada. La fuerza máxima con 15kg extra es 631,5595 N; seis veces el valor inicial.

Este resultado proporciona la información de que al aumentar mucho el peso, el par no variará de forma descabellada; el motor podrá realizar el paso, pero los eslabones tal vez no resistan tanta carga y se rompan. En la **gráfica 14** se muestra como aumenta la fuerza máxima que sufre el PASIBOT (fuerza entre la manivela motor y la cadera) en función del peso extra que se añada.



gráfica 14: la fuerza máxima sufrida por el PASIBOT para varios pesos extra.

4.4. Solución Dinámica inversa pie deslizando

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos aplicando el programa de dinámica inversa con posibilidad de que deslice el pie de apoyo. Recordamos que en este cálculo, en cada punto se determina si desliza o no, y en función de eso se realiza el análisis de un sistema desmodrómico o de un sistema con un grado de libertad adicional debido al deslizamiento.

Como en el anterior capítulo, con el programa desarrollado se podría calcular la influencia que tiene cualquier parámetro en el caminar del bípodo, lo que da la posibilidad de un sinnúmero de estudios y análisis. Sólo serán mostrados los que hemos considerado de mayor interés. Para los resultados mostrados, hemos tomado los valores más reales: la densidad del aluminio del PASIBOT, el verdadero peso de la cadera y su motor y las dimensiones reales.

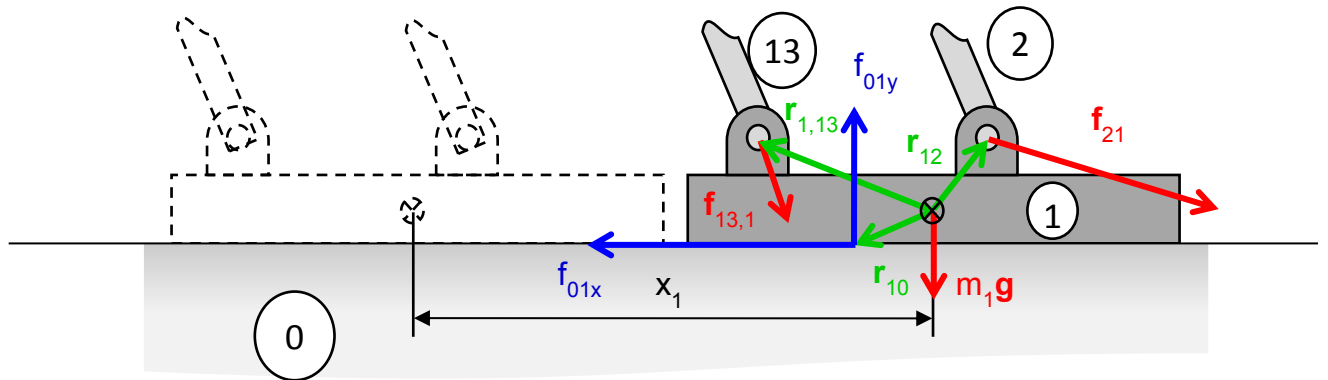
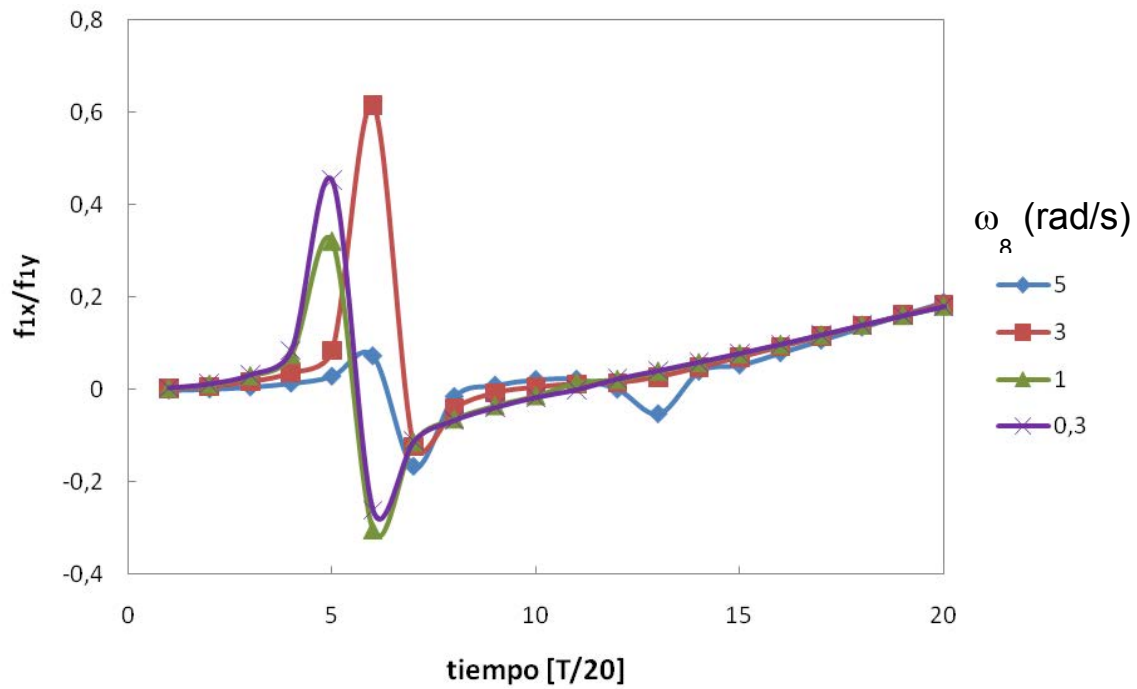


Figura 52. Representación de las fuerzas que interactúan entre el pie de apoyo (eslabón 1) y la tierra (eslabón 0).

La Figura 52 muestra la relación entre la componente horizontal y la componente vertical de la fuerza que ejerce el suelo sobre el pie de apoyo. El coeficiente de rozamiento estático marca el límite superior a la relación entre ambas componentes: $\frac{f_{01x}}{f_{01y}}$ para que no ocurra deslizamiento. Si esa relación alcanza o supera el valor de μ_e , se producirá el deslizamiento.

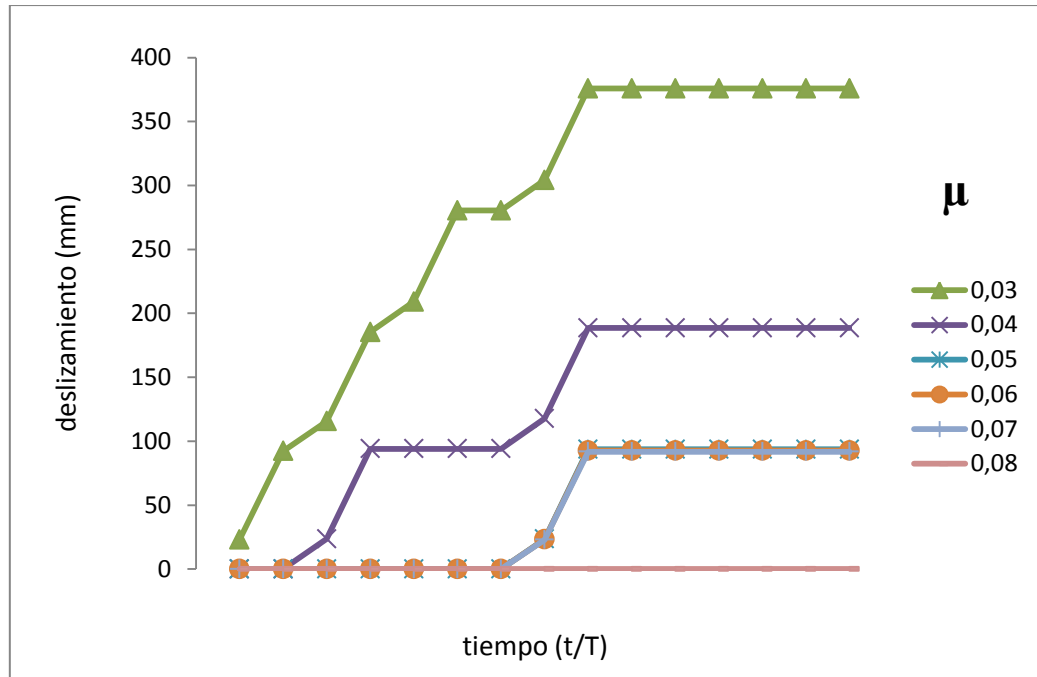
En la gráfica 15 se representa la relación $\frac{f_{01x}}{f_{01y}}$ en función del tiempo para el pie para varias velocidades del motor.



gráfica 15: representación del coeficiente límite de deslizamiento para el pie para diferentes velocidades del motor.

Se puede observar que hay un cambio de signo, esto es debido a que las fuerzas horizontales sobre el pie de apoyo cambian de dirección. De esta gráfica se puede obtener la información, de en qué momento del paso la relación entre las fuerzas horizontales y verticales es mayor en el pie de apoyo. Esto nos muestra la zona donde se producirá más fácilmente el deslizamiento. Se puede deducir que esa zona es prácticamente la misma, independientemente de la velocidad angular.

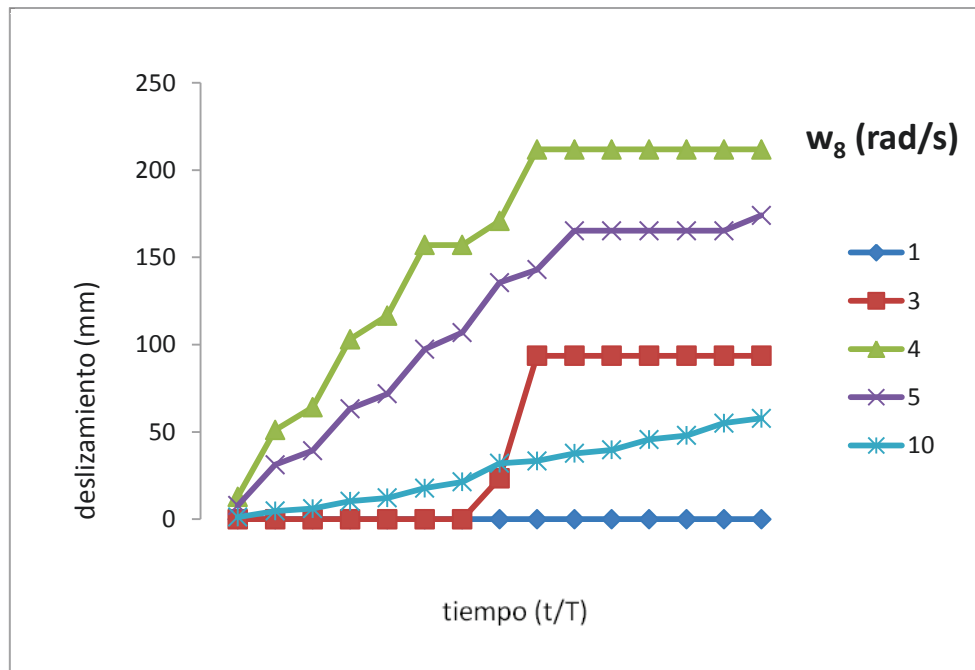
En la gráfica 16 se muestra el deslizamiento del pie de apoyo en función del tiempo a lo largo de un paso, para diferentes coeficientes de fricción (se supone el coeficiente de fricción dinámico igual al estático: $\mu=\mu_e=\mu_d$) bajos y una velocidad de la manivela motor alta $w_8=3\text{rad/s}$. De esta gráfica se observa, que el mínimo coeficiente de fricción que previene el deslizamiento para $w_8=3\text{rad/s}$ es $\mu=0,08$. También, se puede observar, como ya se apreciaba en la gráfica 15, como el robot desliza durante unas fases concretas. Si el pie desliza solo una vez, deslizará sobre la mitad del paso ($\mu=0,07$) hasta que alcanza su deslizamiento máximo en $t=0,6T$. Si desliza dos veces ($\mu=0,04$), el primero ocurre en el primer cuarto, desde $t=0,15T$ hasta $t=0,25T$, y el segundo otra vez en la mitad del paso.



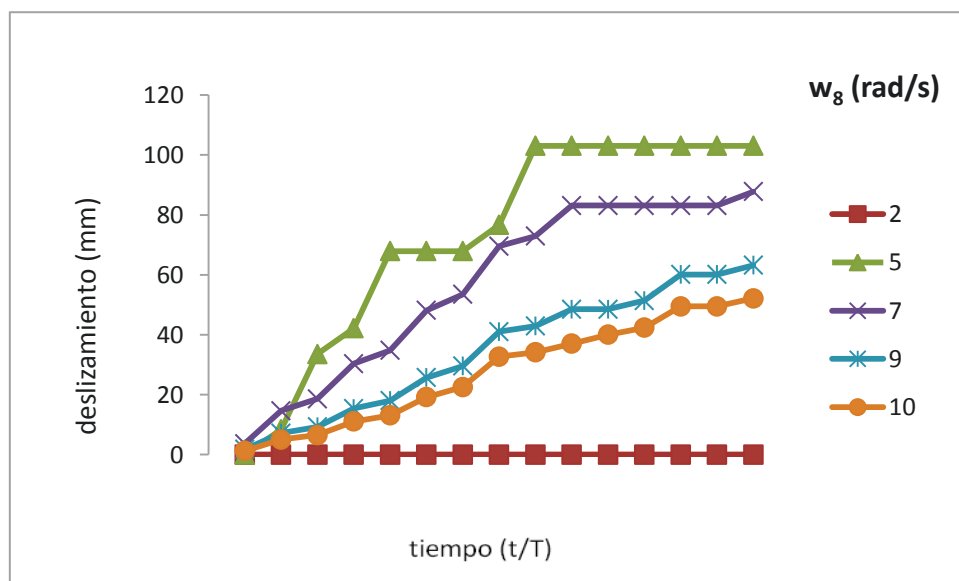
gráfica 16: el deslizamiento del pie de apoyo del PASIBOT para diferentes coeficientes de rozamiento con una velocidad motor igual a 3 rad/s.

En la gráfica 17 y en la gráfica 18 se ha representado el deslizamiento para diferentes velocidades y un mismo coeficiente de fricción $\mu = 0,05$ y $0,1$ respectivamente. Como en las gráfica 15 y gráfica 16, se pueden apreciar las dos fases del paso donde probablemente deslice el pie sin problemas. Estos resultados sugieren que el deslizamiento puede ser drásticamente reducido, o tal vez eliminado, sin comprometer la velocidad de paso, mediante la reducción de la velocidad angular en las fases de deslizamiento más probable (en el primer cuarto y sobre la mitad del paso) y aumentarla en otros momentos, es decir, mediante la definición de una apropiada función de w_8 (velocidad angular de la manivela motor) dependiente del tiempo.

Para la gráfica 17 y la gráfica 18 cabe también destacar, que están representadas respecto al tiempo de un paso ($T =$ tiempo de un paso), y el tiempo de cada paso depende de la velocidad angular de la manivela motor w_8 . Muestran lo que desliza el PASIBOT para diferentes velocidades angulares al dar un paso, pero el tiempo de cada paso es diferente para cada velocidad angular.

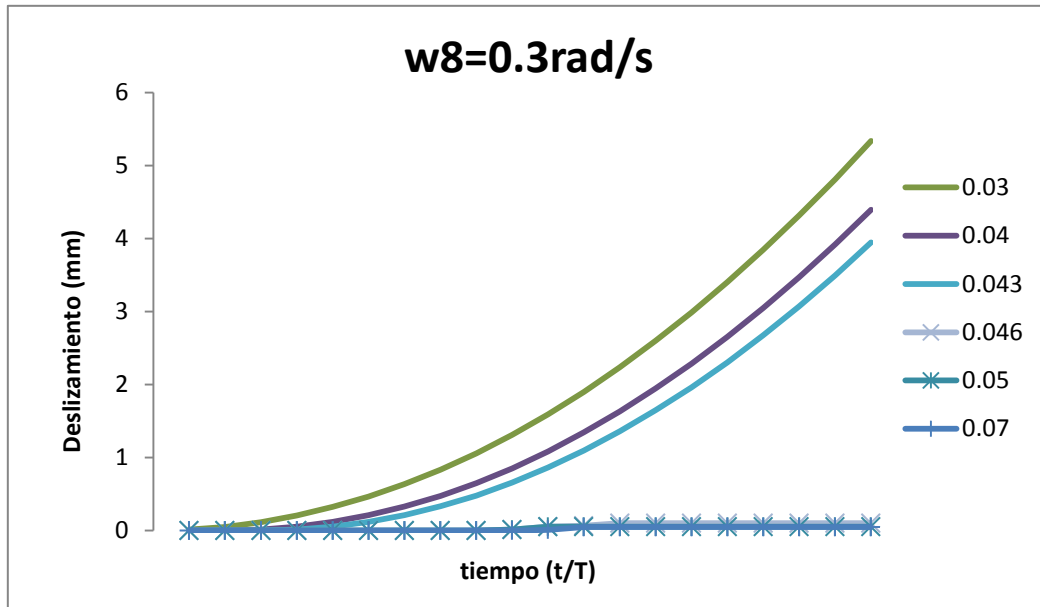


gráfica 17: el deslizamiento del pie de apoyo del PASIBOT para diferentes velocidades angulares del motor con un coeficiente de rozamiento bajo (0.05)



gráfica 18: el deslizamiento del pie de apoyo del PASIBOT para diferentes velocidades angulares del motor con un coeficiente de rozamiento bajo (0.1)

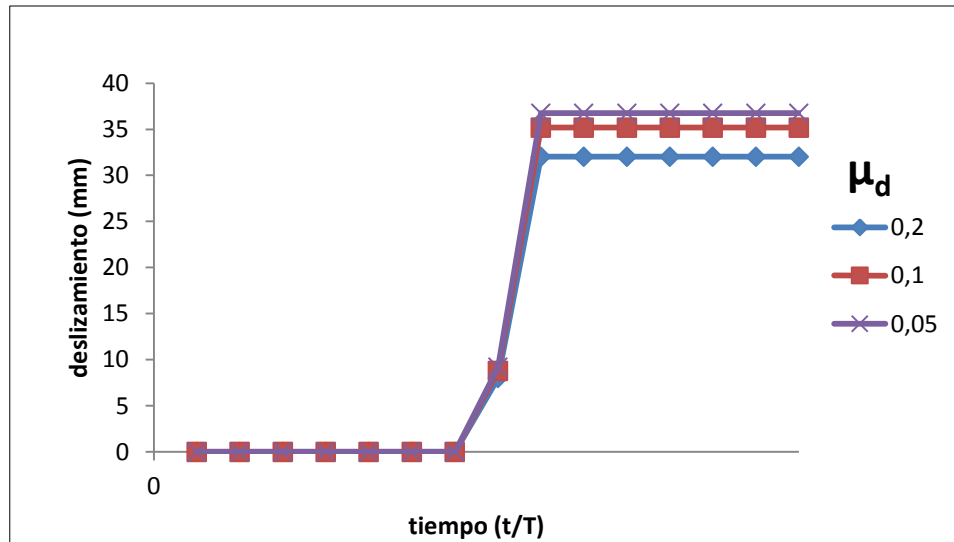
En la gráfica 19 se muestra el cálculo del inicio del deslizamiento del PASIBOT con la velocidad angular w_8 constante de $w_8=0.3\text{rad/s}$. Se aprecia claramente que entre el coeficiente 0.046 y 0.043 empieza a deslizarse. Debido a que es una velocidad baja, para que deslice, el coeficiente tiene que ser muy bajo.



gráfica 19: el deslizamiento del pie de apoyo del PASIBOT para diferentes coeficientes de rozamiento con una velocidad del motor igual a 0.3 rad/s.

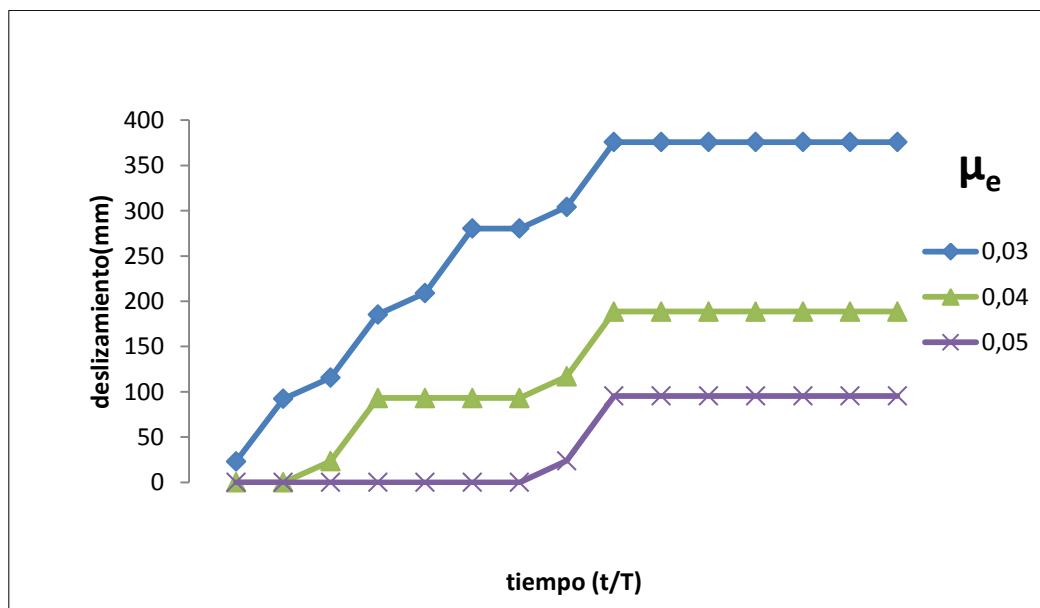
Para los anteriores resultados se supuso el coeficiente de rozamiento de fricción dinámica igual al estático: $\mu=\mu_e=\mu_d$, ya que solo se quería estudiar cuando empezaba a deslizarse. Pero los programas desarrollados usando el “análisis mecánico inteligente” para esta tesis, al ser paramétricos, pueden ser editados para distinguir y aplicar el coeficiente estático, μ_e , cuando empieza a deslizarse y el dinámico, μ_d , cuando está deslizando. En la práctica, el coeficiente de fricción estática es más grande que el coeficiente de fricción dinámica, $\mu_e>\mu_d$.

En la gráfica 20 se muestra el deslizamiento del pie de apoyo para el mismo coeficiente de fricción estática, $\mu_e=0.2$, y tres valores diferentes para el coeficiente de fricción dinámica, $\mu_d=0.2, 0.1$ y 0.05 . Como puede verse, el deslizamiento se produce en el mismo punto para los tres casos, mientras que, como se esperaba, a menor coeficiente de fricción dinámica, mayor será la distancia de deslizamiento.



gráfica 20: el deslizamiento para una velocidad motor $w_s=5$ rad/s y un coeficiente de fricción estático $\mu_e=0,2$ y varios coeficiente de fricción dinámicos μ_d .

En la gráfica 21 se muestra el deslizamiento del pie de apoyo para el mismo coeficiente de fricción dinámico, $\mu_d=0,03$, y tres valores diferentes para el coeficiente de fricción estático, $\mu_e=0,03, 0,04$ y $0,05$. Se puede apreciar que a menor coeficiente de fricción estático antes empieza a deslizarse, y, que en los tramos que deslizan lo hacen con la misma pendiente y variación. Como por ejemplo sobre la mitad ($t=0,5T$), las tres graficas deslizan (han superado el coeficiente de rozamiento estatico o ya se encontraban deslizando) con la misma inclinación y desplazándose lo mismo.



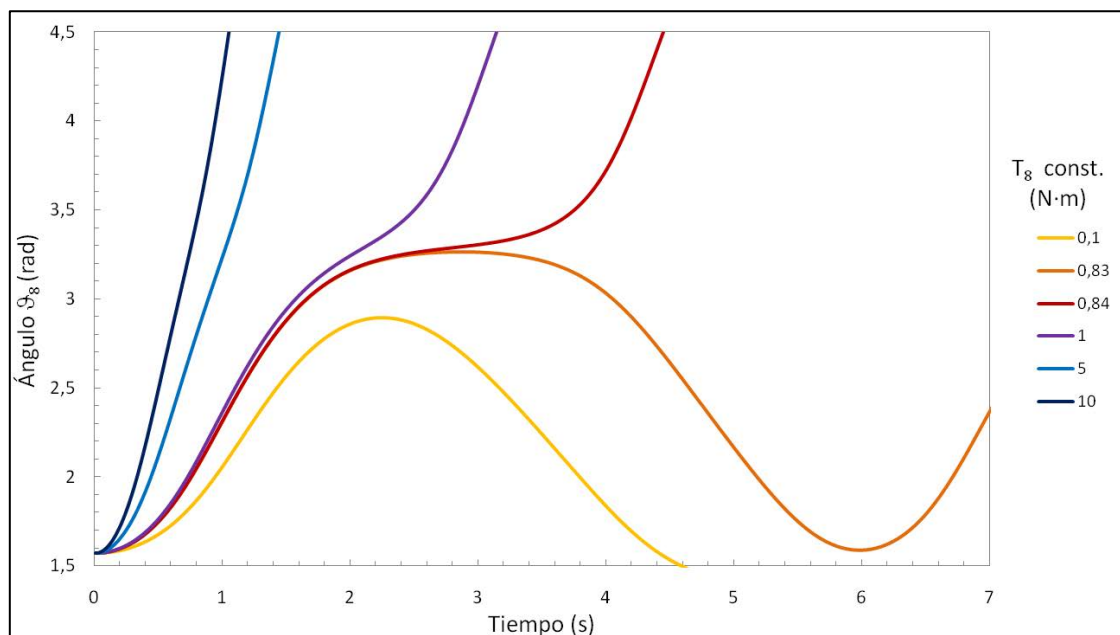
gráfica 21: el deslizamiento para una velocidad motor $w_s=3$ rad/s y un coeficiente de fricción dinámicos $\mu_d=0,03$ y varios coeficiente de fricción estático μ_e .

4.5. Solución Dinámica directa

La simulación de la dinámica directa es particularmente más valiosa en cálculos transitorios, por ejemplo, para el cálculo del par mínimo aplicado a la manivela motor para que el PASIBOT empiece a caminar desde el reposo (el par de arranque). En la gráfica 22 se representa el avance del ángulo de la manivela motor en función del tiempo para diferentes pares aplicados al motor.

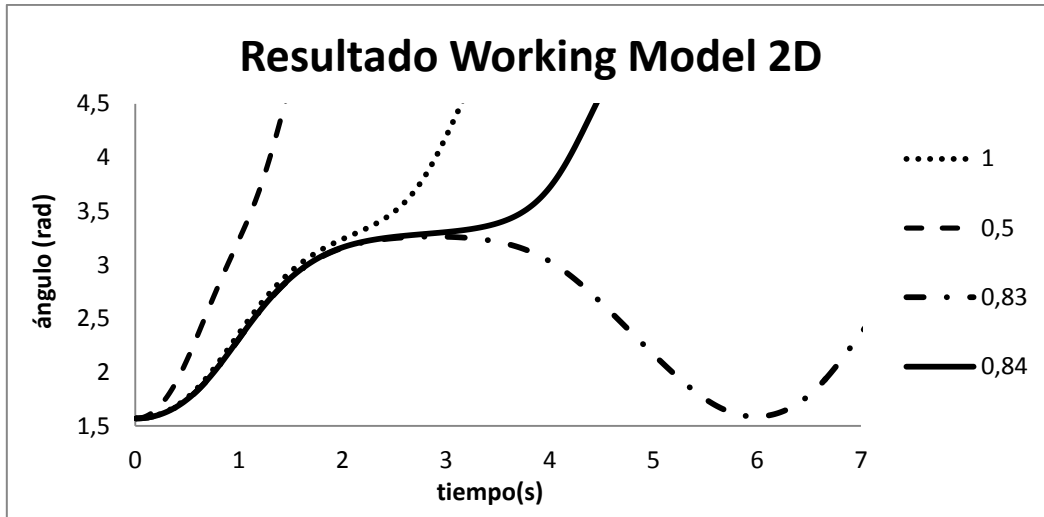
Como se muestra en la gráfica 22, el par por el cual el bípodo puede empezar a caminar es 0,84 Nm. Nótese que el paso completo supone un giro de π rad de la manivela motor, empezando desde la posición inicial $\pi/2$, en la cual el pie del aire está atrás, hasta la posición final $3\pi/2$ en la cual el pie del aire está delante. En este ejemplo, la densidad de todos los enlaces es la misma que la del aluminio, de la que se construye el prototipo.

Se puede observar claramente, cómo para los valores del par superiores a 0.084Nm el bípodo consigue dar un paso completo. De hecho al superar la mitad del paso, acelerarían más, tardando mucho menos en hacer la segunda mitad del paso que la primera. Esto es lógico, debido a que es cuando el pie ha subido a su parte más alta y empieza a descender, sin demanda de par. Esta información es muy útil si se desea introducir un sistema con dinamo, para poder almacenar esta energía que se genera y que el PASIBOT sea más eficiente. Sin embargo, para valores inferiores a 0.084Nm el par no es suficiente para dar una zancada completa y la solución corresponde al bípodo realizando un movimiento cíclico de vaivén sin llegar a finalizar el paso.



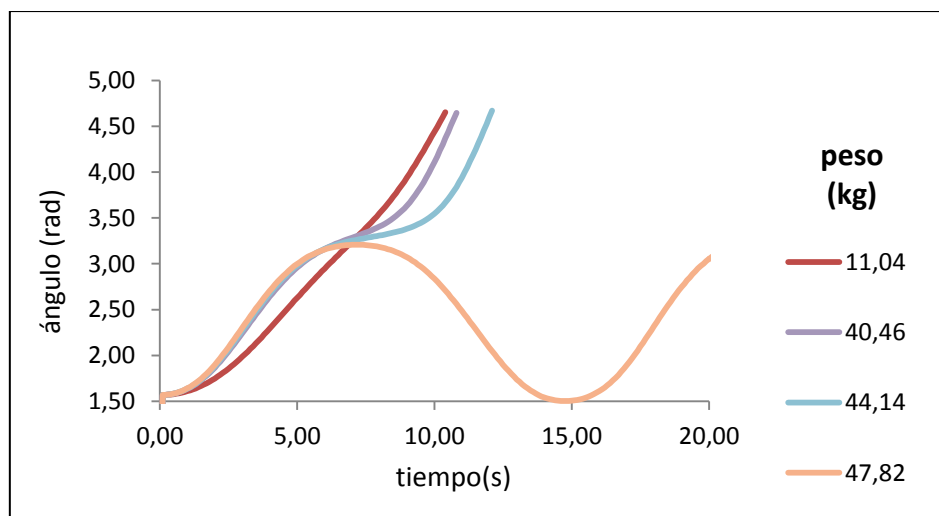
gráfica 22: el ángulo del motor girado en función del par dado.

Estos resultados se compararon con los obtenidos con el software comercial “Working Model 2D”, véase gráfica 23 . Comparando la gráfica 22 y la gráfica 23, se observa que los resultados obtenidos con el programa desarrollado en esta tesis son similares a los resultados obtenidos con el software “Working Model 2D”, lo que confirma la validación de nuestro programa.



gráfica 23: el ángulo del motor girado en función del par dado obtenido con Working Model 2D

El programa que presentamos permite modificar la densidad de los eslabones del PASIBOT fácilmente. De esta manera, la medida en que afecta la densidad al par mínimo requerido puede ser determinada. En la gráfica 24, el ángulo de la manivela motor se representa en función del tiempo para un par motor constante, $T_8 = 1$ Nm para varios pesos totales del PASIBOT (obtenido mediante la variación de la densidad de todos los enlaces, el peso está repartido uniformemente por todo el bípodo).



gráfica 24: el ángulo del motor girado en función del par dado con pesos distintos.

4.6. Análisis de la cadera del PASIBOT

El programa desarrollado proporciona los valores de las fuerzas entre eslabones, lo cual posibilita realizar estudios de resistencia de las partes de estos eslabones, como el que se presenta aquí: la cadera es un eslabón crítico en el diseño del PASIBOT. En este apartado se realizará el estudio tensional de la cadera, mediante el programa Ansys; para ello se tendrá que definir la cadera, y las fuerzas a las que estará sometida. Se procede a estudiar la cadera, debido a su peso, importancia y esfuerzos a que es sometida.

El primer prototipo del robot bípedo, PASIBOT, construido por la Universidad Carlos III de Madrid está hecho de aluminio con una densidad de $2,7\text{gr/cm}^3$. Este material tiene un módulo de Young de $7,2\text{MPa}$, y un coeficiente de Poisson de $0,33$.

En la Figura 53 se muestran los planos de la cadera:

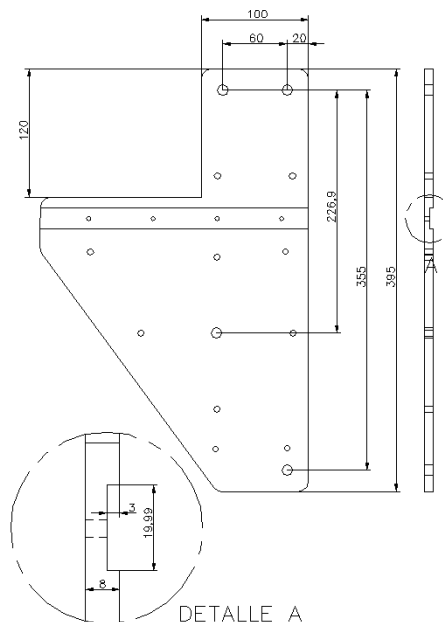


Figura 53: Planos de la cadera del PASIBOT con las unidades en milímetros.

Así, con estos datos se modelará en Ansys. Se podría utilizar un elemento plano tipo Shell, pero debido a que hay distintos espesores en la pieza se ha optado por utilizar un elemento tipo Solid95. La pieza queda en Ansys como se ve en la Figura 54:

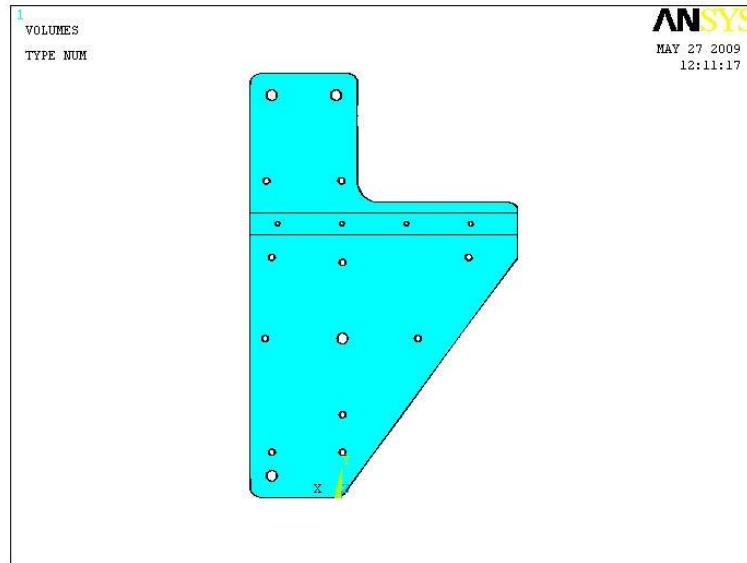


Figura 54: Cadera modelada en Ansys

Para la realización del análisis de la resistencia de la cadera, se ha de conocer el valor de las fuerzas que actúan sobre ella. Para ello se utilizará el algoritmo definido en el apartado “dinámica del PASIBOT” utilizando el programa que hemos elaborado en este trabajo que proporciona dichos valores. Concretamente, las fuerzas sobre la cadera provienen de los contactos con otros cinco eslabones: Eslabón 4 (tendón inferior), Eslabón 6 (tendón superior), Eslabón 8 (manivela impulsada por el motor), Eslabón 9 (balancín) y Eslabón 11 (cursor, que es móvil e irá variando su posición de contacto con la cadera a lo largo del paso).

Se va a analizar la placa de la parte correspondiente a la pierna que está apoyada, ya que es la que está soportando tanto su propio peso como el peso de la pierna en el aire del PASIBOT y las tensiones debidas al par que ejerce el motor y gracias al cual el robot es capaz de andar.

Se tendrá en cuenta también que las caderas soportan el peso de un motor (de masa 3.6kg), unos carretes (de masa 0.5kg en total), y dos suplementos de sujeción del motor (0.546kg cada uno). Esta masa se sujeta a la cadera mediante cuatro agujeros, que se detallarán más adelante.

Las fuerzas sobre la cadera se obtienen teniendo en cuenta esa masa (del motor, carretes y sujeciones).

Las fuerzas que se calculan, como ya se ha dicho, son datos obtenidos durante la mitad de un paso, (es decir, en el intervalo de tiempo que transcurre desde que un pie del PASIBOT se levanta del suelo hasta que lo vuelve a apoyar). Este “semipaso” se divide en intervalos de tiempo, y en todos ellos se harán los cálculos correspondientes. Así tendremos tantos datos de fuerzas como intervalos, para cada articulación y para cada cadera. Para tomar valores de fuerzas para las simulaciones en Ansys, se han tomado los valores máximos en cada contacto con otras articulaciones de la cadera en un semipaso.

En este análisis, se calculan las fuerzas a las cuales está sometida la cadera del PASIBOT. Se han obtenido todos los valores en el intervalo del semipaso del robot, pero, sólo se analizarán los tres más desfavorables. En la Tabla 9, se ven las fuerzas máximas en cada contacto (en valor absoluto), obtenidas sobre la cadera teniendo en cuenta la masa del motor, carretes y sujeciones. Estas fuerzas se obtienen en el semipaso en el que el pie izquierdo está en el aire, y se observa que las fuerzas son mucho más grandes sobre la cadera derecha:

Tabla 9: Fuerzas en Newton sobre la cadera teniendo en cuenta pesos del motor, carretes y sujeciones.

f4-14der	29,729	111,34	154,84
f6-14der	224,86	170,12	125,35
f8-14der	243,72	127,66	120,37
f9-14der	79,279	235,12	219,24
f11-14der	101,32	1,0451	-50,29
f14-4izq	6,8005	2,2699	0,46077
f14-6izq	9,8934	22,679	24,912
f14-9izq	21,253	8,6697	5,6982
f14-11izq	3,4343	3,4236	3,4343

En la Tabla 9 se pueden ver marcados en verde los valores máximos de fuerzas de cada contacto sobre la cadera durante un paso. Para esos instantes en los que la fuerza sobre la cadera de algún contacto es máxima, se obtienen las demás fuerzas sobre la cadera. Así, dentro del caso 1, se harán 3 simulaciones (por ser las más desfavorables), que son las que se muestran en la Tabla 10:

Tabla 10: Datos de fuerzas para las simulaciones en Ansys

	a	b	c
f414der	29,729	111,34	154,84
f614der	224,86	170,12	125,35
f814der	243,72	127,66	120,37
f914der	79,279	235,12	219,24
f1114der	101,32	1,0451	-50,29

Esta tabla representa las fuerzas que afectan a la cadera derecha, la que se va a analizar en este trabajo. Hay que aclarar que lógicamente se conocen las componentes de todas esas fuerzas. También se conoce la posición del eslabón 11, (que como se ha dicho es móvil), en cada uno de los tres casos, y por tanto se conoce donde aplica su fuerza a la cadera.

Los eslabones 4 y 6 aplican la fuerza a la cadera en el mismo sitio, y es un agujero de diámetro 10 mm y espesor 8 mm. Los eslabones 8 y 9 aplican su fuerza también en agujeros del mismo diámetro y espesor que el anterior.

Sabiendo esto, hay que ver las componentes de cada fuerza. Se supondrá para las fuerzas de los agujeros donde se aplican las fuerzas 4 y 6, 8, y 9, que se ejercen sobre un perímetro del agujero de 6mm. Como todos estos agujeros tienen un espesor de 8mm, habrá que tomar una tensión de:

$$\sigma_{x\text{agujero}} = \frac{F_x(N)}{(6 * 8)mm^2} = 0.02083 \times F_x (MPa)$$
$$\sigma_{y\text{agujero}} = \frac{F_y(N)}{(6 * 8)mm^2} = 0.02083 \times F_y (MPa)$$

Sin embargo para las fuerzas del contacto 11 sobre la cadera, que se ejercen sobre la cara inferior de la corredera (donde hay cambio de espesores), esta fuerza sólo tiene componente “y”. El espesor de la zona donde se aplica es 3 mm, y se supondrá un ancho de otros 3 mm. Por lo tanto esta fuerza vertical se tomará como:

$$\sigma_{yf11} = \frac{F_{11-14(y)}(N)}{(3 \times 3)mm^2} = 0.1111 \times F_{11-14(y)} (MPa)$$

Por lo tanto, las fuerzas totales quedarán ubicadas como se muestra en la Figura 55:

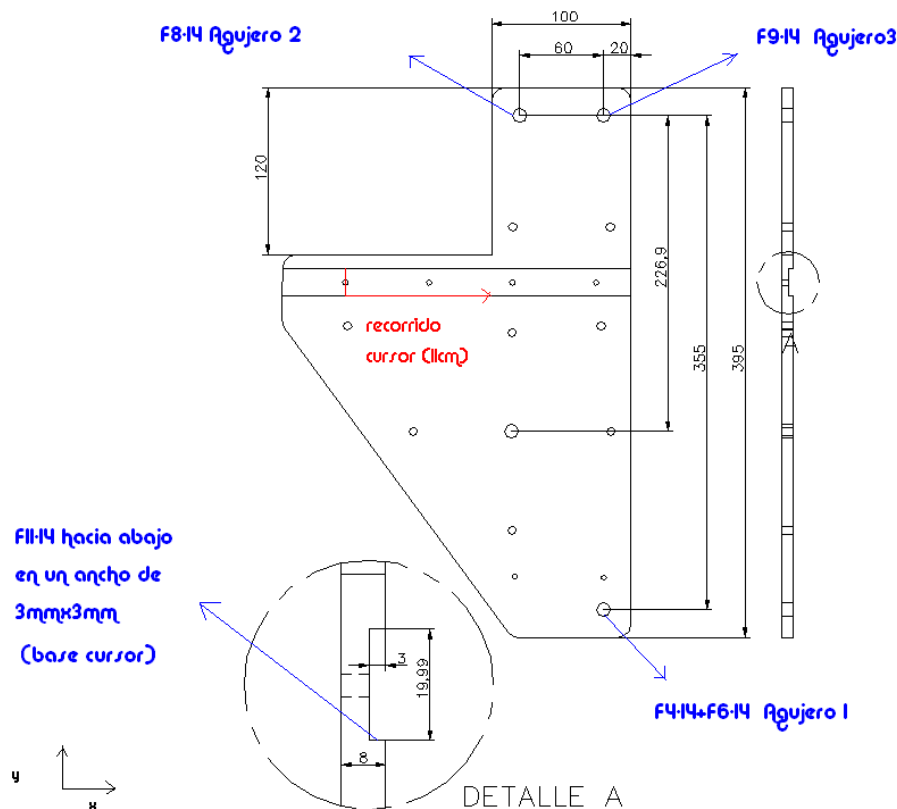


Figura 55: Ubicación de las fuerzas

Y en la Tabla 11 se muestran los valores de fuerzas, y tensiones a aplicar en cada ubicación:

Tabla 11: Fuerzas (N) y tensiones (MPa) aplicadas y ubicaciones

	a	b	c
Agujero 1			
$F_x=F4-14x+F6-14x$	-1,24	-4,003	-3,88
σ_x	-0,0258	-0,08338	-0,08082
$F_y=F4-14y+F6-14y$	243,6222	247,698	250,87
σ_y	5,0746	5,1595	5,2256
Agujero 2			
$F_x=F8-14x$	69,69	121,92	37,019
σ_x	1,4516	2,5395	0,7711
$F_y=F8-14y$	-269,31	3,8547	79,706
σ_y	-5,6097273	0,0802934	1,66027598
Agujero 3			
$F_x=F9-14x$	-62,796	-119,27	-28,743
σ_x	-1,30804068	-2,4843941	-0,59871669
$F_y=F9-14y$	-48,674	-203,47	-218,28
σ_y	-1,01387942	-4,2382801	-4,5467724
Base cursor			
$F_x=F11-14x$	0	0	0
σ_x	0	0	0
$F_y=F11-14y$	101,88	1,5626	-49,785
σ_y	11,3199887	0,17362205	-5,53166114

Llegados a este punto y con la cadera ya modelada, se procede a realizar el mallado e ir aplicando las distintas tensiones como ya se ha explicado para cada simulación en Ansys. El resultado del mallado de la cadera es el que se muestra en la Figura 56, en el cual, se realizó un mallado más exhaustivo en los agujeros y zonas de aplicación de fuerzas.



Figura 56: Cadera mallada

Para cada simulación, nos interesa la distribución de tensiones, (Von Misses) y las deformadas, con lo que serán estos resultados los que se mostrarán. En el apartado anterior se dieron los valores de fuerzas a aplicar.

Comenzaremos mostrando los resultados del análisis del supuesto. La tensión de Von Misses y la deformada se pueden observar en las Figura 57, Figura 58, Figura 59 y Figura 60 respectivamente:

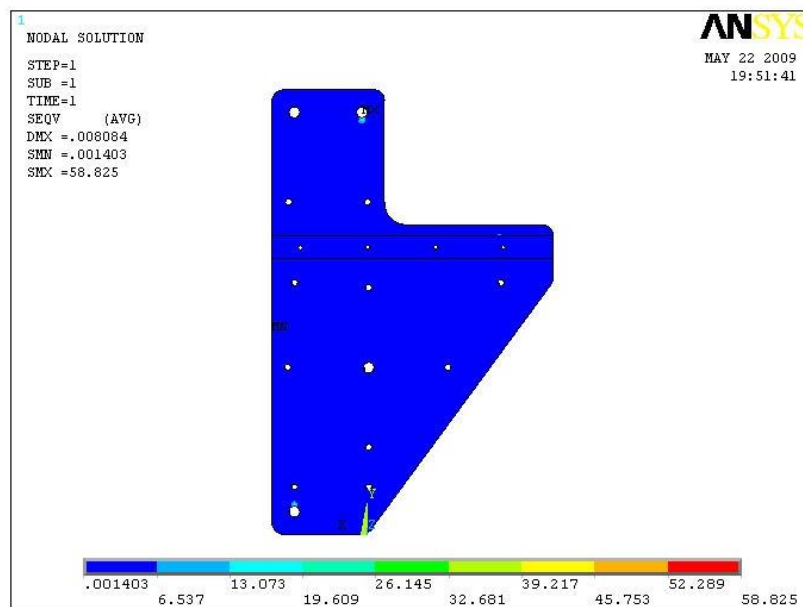


Figura 57: Tensión de Von Misses

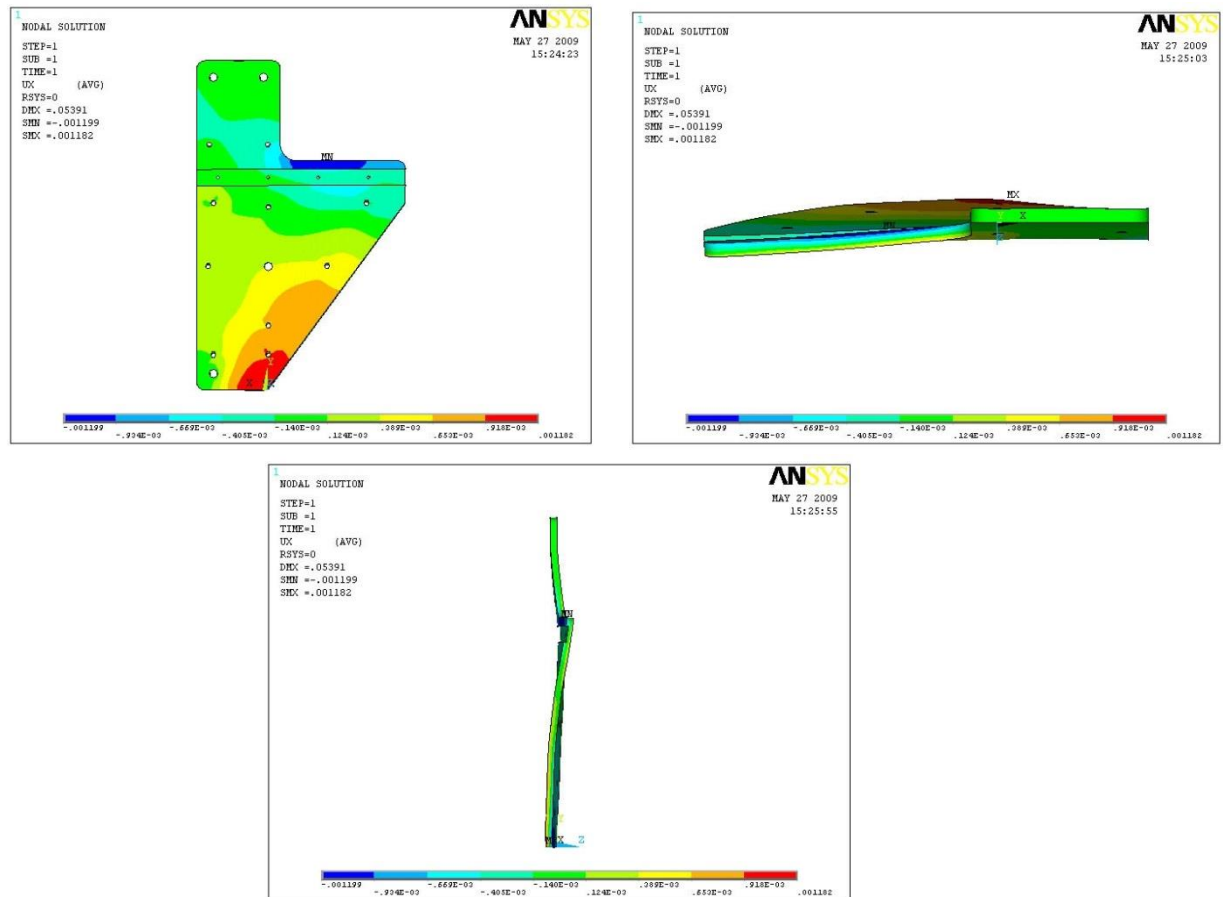


Figura 58: Deformada en x

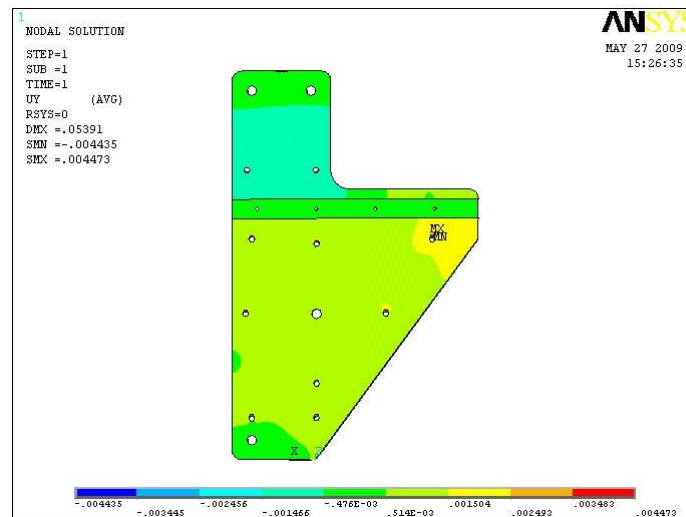


Figura 59: Deformada en y

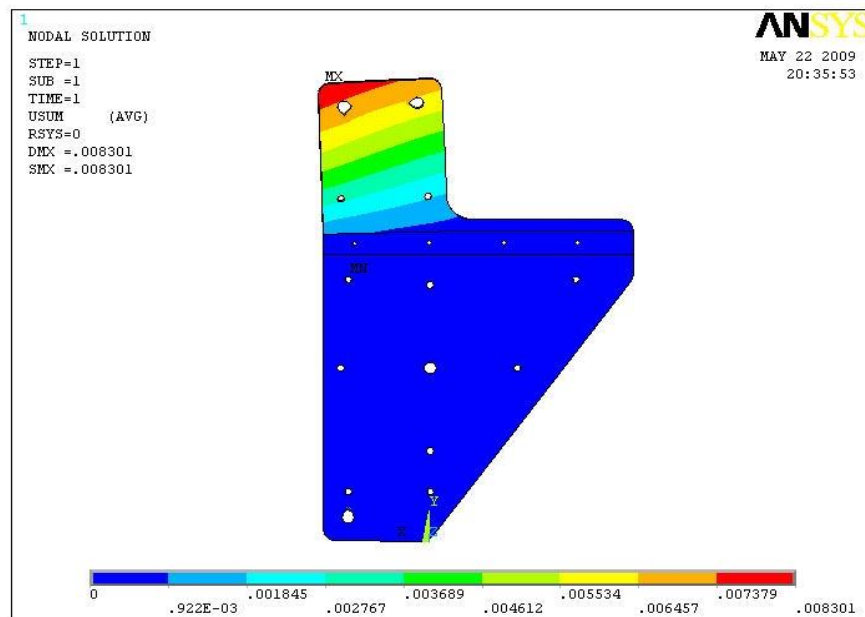


Figura 60: Desplazamientos en autoescala.

Notar que las figuras están en una escala muy grande, y las tensiones y deformaciones que sufren son despreciables. Y con estos resultados obtenidos se pueden obtener estas conclusiones con respecto a la cadera:

La cadera sufre una distribución de tensiones de valor pequeño a lo largo de un paso.

El valor máximo registrado de tensión para el caso más desfavorable es 90 MPa, y el de desplazamientos de 0.06 mm, lo cual es bastante razonable.

4.7. Cálculo del momento de vuelco y balanceo

En este capítulo se muestra cómo se pueden obtener los momentos de vuelco, balanceo y giro en el pie de apoyo que sufre el PASIBOT. Para ello, se necesitan las fuerzas externas, los aceleraciones, sus momentos de inercias, pesos y posiciones de cada eslabón. Estos datos los tenemos gracias al programa desarrollado en Matlab. Las fuerzas han sido calculadas tanto en su proyección en x como en y, para saber así su dirección y sentido, ya que influye en el tipo de momento que va a generar. Los valores son representados en N, y son para las distintas posiciones de un paso, en concreto, para diez divisiones de un paso con una $\omega_s=0.3\text{rad/s}$. Las posiciones respecto al punto medio del pie de apoyo (donde se toman los momentos), son también obtenidas distinguiendo entre sus componente x,y,z. Sabiendo estos datos, se puede obtener los momentos con la fórmula:

$$M = \sum_i \vec{r}_i \times [(-m_i \vec{a}_{cmi}) - m_i \vec{g}]$$

En la Tabla 12 se muestra las aceleraciones, obtenidas con el programa desarrollado en esta tesis, tanto en x como en y de los centros de masas de todos los eslabones para calcular las fuerzas de inercia.

Tabla 12: todas las fuerzas externas de todos los eslabones para un semiperiodo.

m2*a2x;	0.001174	0.000460	-1.33E-05	-0.00032	-0.000484	-0.000513	-0.000497	-0.000532	-0.000673
m2*g+m2*a2y;	4.5719	4.5719	4.5719	4.5719	4.572	4.5721	4.5722	4.5723	4.5724
I2*alf2;	-0.10692	-0.044921	-0.004519	0.022501	0.036312	0.039273	0.038585	0.043322	0.059601
m3*a3x;	0.001077	0.000698	0.000294	-7.17E-5	-0.000306	-0.000356	-0.000293	-0.000244	-0.000374
m3*g+m3*a3y;	2.2857	2.286	2.286	2.286	2.286	2.286	2.2861	2.2862	2.2863
I3*alf3;	0.006585	-0.015858	-0.019444	-0.01450	-0.008598	-0.006254	-0.008313	-0.011889	-0.011396
m4*a4x;	0.000478	0.000310	0.000130	-3.19E-5	-0.000134	-0.000158	-0.000130	-0.000108	-0.000166
m4*g+m4*a4y;	1.5239	1.524	1.524	1.524	1.524	1.524	1.5241	1.5241	1.5241
I4*alf4;	0.001964	-0.004730	-0.005800	-0.00432	-0.002565	-0.001865	-0.002480	-0.003546	-0.003397
m5*a5x;	0.000391	0.000153	-4.42E-06	-0.00010	-0.000161	-0.000171	-0.000165	-0.000177	-0.000224
m5*g+m5*a5y;	0.76193	0.76191	0.76191	0.76194	0.76197	0.76199	0.76202	0.76204	0.76209
I5*alf5;	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m6*a6x;	0.000566	0.000467	0.000266	4.57E-05	-0.000106	-0.000145	-9.46E-05	-4.02E-05	-0.000108
m6*g+m6*a6y;	1.5238	1.5241	1.5241	1.5241	1.524	1.524	1.5241	1.5241	1.5242
I6*alf6;	-0.004003	-0.001682	-0.000169	0.000842	0.001359	0.001470	0.001444	0.001622	0.002231
m7*a7x;	0.000345	0.000501	0.000421	0.000242	9.55E-05	5.46E-05	0.000112	0.000177	0.000101
m7*g+m7*a7y;	1.2696	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.2701	1.2702	1.2703
I7*alf7;	0.005066	0.001072	-0.001092	-0.00223	-0.002897	-0.003415	-0.003962	-0.004551	-0.005090
m8*a8x;	3.27E-05	7.41E-05	5.92E-05	2.00E-05	-1.46E-05	-2.59E-05	-1.23E-05	9.49E-06	9.01E-06
m8*g+m8*a8y;	0.25397	0.25402	0.25403	0.25402	0.25401	0.25401	0.25401	0.25402	0.25403
I8*alf8;	3.70E-05	-4.37E-06	-1.36E-05	-5.86E-6	5.34E-06	1.03E-05	5.34E-06	-5.86E-06	-1.36E-05
m9*a9x;	0.000127	0.000217	0.000179	8.58E-05	5.69E-06	-1.87E-05	1.27E-05	5.61E-05	3.66E-05
m9*g+m9*a9y;	0.63488	0.63502	0.63505	0.63503	0.63501	0.63502	0.63505	0.63508	0.6351
I9*alf9;	0.001017	0.000685	0.000567	0.000554	0.000561	0.000526	0.000421	0.000250	4.15E-05
m10*a10x;	0.000454	0.000433	0.000278	8.56E-05	-5.49E-5	-9.26E-05	-4.09E-05	1.98E-05	-3.52E-05
m10*g+m10*a10y;	1.0581	1.0584	1.0585	1.0584	1.0584	1.0584	1.0584	1.0584	1.0584
I10*alf10;	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m11*a11x;	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m11*g+m11*a11y;	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m12*a12x;	0.001427	0.000615	7.06E-05	-0.00030	-0.00049	-0.000547	-0.000543	-0.000602	-0.000795
m12*g+m12*a12y;	2.286	2.2857	2.2857	2.2857	2.2858	2.2859	2.2859	2.286	2.2862

I12*alf12;	-0.01342	-0.005638	-0.000567	0.002824	0.004557	0.004929	0.004843	0.005437	0.007480
m13*g+a13x;	0.001174	0.000460	-1.33E-05	-0.00032	-0.00048	-0.000513	-0.000497	-0.000532	-0.000673
m13*g+m13*a13y;	4.5719	4.5719	4.5719	4.5719	4.572	4.5721	4.5722	4.5723	4.5724
I13*alf13;	-0.10692	-0.044921	-0.004519	0.022501	0.036312	0.039273	0.038585	0.043322	0.059601
m14*a14x;	0.006091	0.008257	0.005964	0.001936	-0.00133	-0.002336	-0.00108	0.000723	0.000183
m14*g+m14*a14y;	29.237	29.243	29.244	29.243	29.242	29.241	29.242	29.243	29.244
I14*alf14;	0.002083	-0.000247	-0.000763	-0.00032	0.000300	0.000578	0.000300	-0.000329	-0.000763
m1*a1izqx;	0.002267	0.002647	0.004049	0.007024	0.009031	-0.000279	-0.00895	-0.006848	-0.004019
m1*g+m1*a1izqy	0.53307	0.53439	0.53558	0.53583	0.53144	0.52535	0.53154	0.53579	0.5354
I1*alf1izq;	1.1E-18	-0.002485	-0.005197	-0.00603	0.004212	0.019435	0.004212	-0.006036	-0.005197
m2*a2izqx;	0.003434	0.005585	0.008756	0.010399	0.003354	-0.010715	-0.00949	-0.003380	-0.000325
m2*g+m2*a2izqy;	4.5724	4.5739	4.5756	4.5789	4.578	4.5577	4.5628	4.5746	4.5758
I2*alf2izq;	0.11158	-0.033385	-0.079168	0.37807	1.5434	0.83624	-0.86877	-0.95215	-0.69847
m3*a3izqx;	0.000507	0.001276	0.001655	8.38E-05	-0.00513	-0.005446	0.001951	0.003527	0.002827
m3*g+m3*a3izqy;	2.2861	2.2863	2.2864	2.2879	2.2902	2.2839	2.2825	2.2858	2.2866
I3*alf3izq;	0.03401	0.079013	0.14729	0.19046	0.07737	-0.33962	-0.22539	0.023503	0.069562
m4*a4izqx;	0.000372	0.001260	0.001878	0.000424	-0.00505	-0.005234	0.002013	0.003544	0.002942
m4*g+m4*a4izqy;	1.5242	1.5243	1.5245	1.5261	1.5287	1.5229	1.5215	1.5242	1.5247
I4*alf4izq;	0.010146	0.023571	0.04394	0.056819	0.023081	-0.10131	-0.067237	0.007014	0.020751
m5*a5izqx;	0.000389	0.000980	0.001581	0.001178	-0.0018	-0.003654	-0.000157	0.001209	0.001243
m5*g+m5*a5izqy;	0.76216	0.76233	0.76262	0.76366	0.76439	0.75905	0.7593	0.76225	0.76274
I5*alf5izq;	3.8E-19	-0.000828	-0.001732	-0.00201	0.001404	0.006478	0.001404	-0.002012	-0.001732
m6*a6izqx;	-4.2E-05	0.000554	0.000590	-0.00146	-0.00645	-0.004086	0.004047	0.004699	0.003410
m6*g+m6*a6izqy;	1.5241	1.524	1.524	1.5252	1.5282	1.5252	1.5227	1.5237	1.5242
I6*alf6izq;	0.004177	-0.00125	-0.002964	0.014156	0.057789	0.031311	-0.032529	-0.035651	-0.026153
m7*a7izqx;	4.75E-5	2.22E-05	-0.000350	-0.00100	-0.00148	-0.000293	0.001025	0.000856	0.000462
m7*g+m7*a7izqy;	1.27	1.2702	1.27	1.2699	1.2703	1.271	1.2702	1.2697	1.2697
I7*alf7izq;	-0.005617	-0.00952	-0.014907	-0.02228	-0.02204	0.009381	0.035686	0.02817	0.015891
m9*a9izqx;	5.27E-5	9.82E-05	-1.36E-05	-0.00022	-0.00038	-0.000105	0.000240	0.000225	0.0001268
m9*g+m9*a9izqy;	0.63497	0.63507	0.63505	0.635	0.63509	0.63525	0.63507	0.63495	0.63496
I9*alf9izq;	-0.00038	-0.00113	-0.002192	-0.003749	-0.00465	-0.001156	0.0029396	0.002888	0.0018589
m10*a10izqx	-7.08E-5	-0.00017	-0.000642	-0.001470	-0.00211	-0.000259	0.0020603	0.0016753	0.00091116
m10g+m10*a10iy	1.0582	1.0583	1.0582	1.0582	1.0586	1.0591	1.0586	1.0582	1.0582
I10*alf10izq;	1.0E-18	-0.00216	-0.004536	-0.00526	0.003676	0.016963	0.003678	-0.0052	-0.004536
m11*a11izqx;	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m11g+m11*a11iy	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m12*a12izqx;	0.000507	0.001278	0.0016919	0.000244	-0.00506	-0.005974	0.002015	0.003688	0.002864
m12g+m12*a12iy	2.2861	2.2866	2.2871	2.2886	2.2896	2.2815	2.282	2.2865	2.2873
I12*alf12izq;	0.03401	0.079013	0.14729	0.19046	0.077372	-0.33962	-0.22539	0.023503	0.069562
m13*a13izqx;	0.003434	0.00559	0.0088292	0.01072	0.003482	-0.011772	-0.00936	-0.00305	-0.000252
m13g+m13*a13iy	4.5724	4.5745	4.5769	4.5804	4.5769	4.5529	4.5617	4.5761	4.5771
I13*alf13izq;	0.11158	-0.03338	-0.079168	0.37807	1.5434	0.83624	-0.86877	-0.95215	-0.69847

Sabiendo ya todas las fuerzas que sufre cada eslabón debidas a la inercia y a la gravedad, se pueden calcular los momentos que sufre el pie de apoyo del PASIBOT. Para calcular esto, ha de aclararse que las fuerzas van a generar tres tipos de momentos en el pie de apoyo. Un momento en sentido del eje x, el momento de vuelco; otro en el eje y, el momento de giro; y otro en el eje z, el momento de balanceo. Estos momentos se representan en la Figura 61.

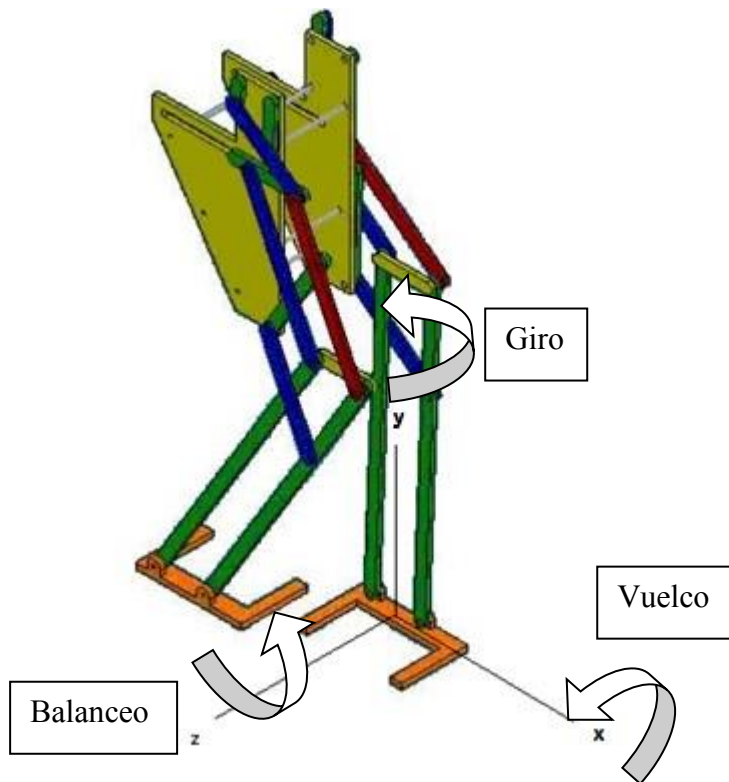
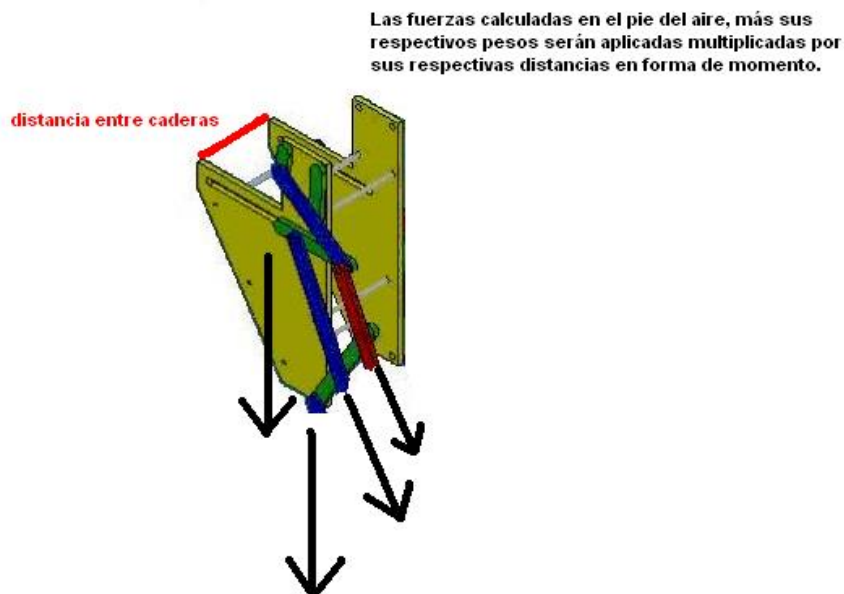
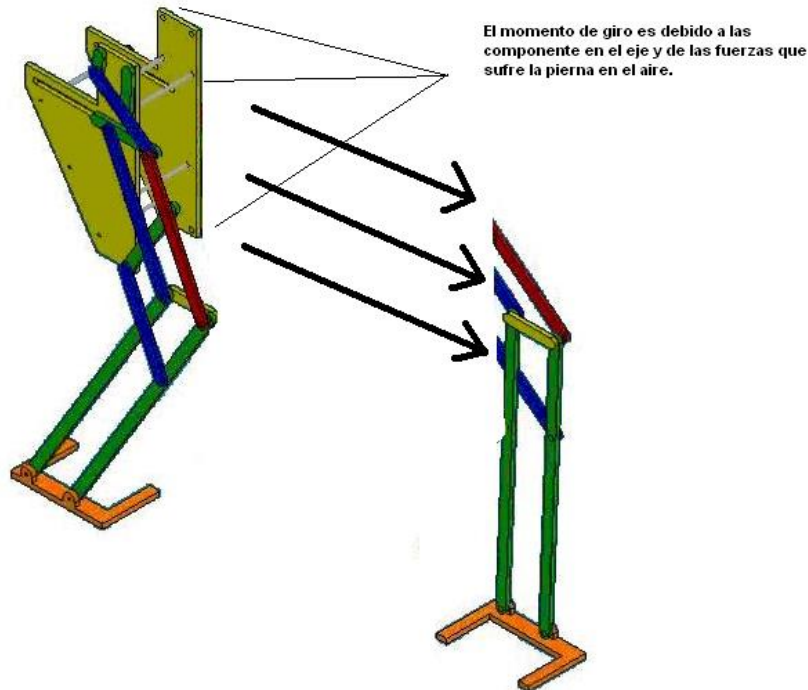


Figura 61: momentos de balanceo, vuelco y giro.

Se puede apreciar (Figura 61) que en el momento del vuelco solo influyen las fuerzas que tengan su línea de acción separadas una distancia del eje del momento de cálculo (eje x). Es decir, para el momento de vuelco solo influyen las fuerzas que actúan sobre los eslabones de la pierna del aire y la mitad de la cadera. Y de esas fuerzas solo influye su componente en el eje y.



En el momento de giro influyen las fuerzas que distan del eje y, esas son las mismas fuerzas que para el vuelco, pero su componente en el eje x.



Y para el momento de balanceo, se toma como punto de balanceo el punto medio del pie, con lo cual, influyen todas las componentes en el eje y todas las fuerzas, ya sean de la pierna en el aire como de la pierna en apoyo. Para este último calculo, deberemos saber la diferencia entre todos los centros de masas en x, y el punto medio del pie.

Sabiendo ya todas las fuerzas, y sus respectivas distancias perpendiculares al punto central de pie de apoyo, ya se pueden proceder a calcular los momentos de giro, vuelco y balanceo. Ya que todos los datos se han obtenido para la velocidad angular del motor constante $\omega = 0.3 \text{ rad/s}$, y en diez valores en un paso del PASIBOT, se van a calcular los momentos para esos diez puntos.

Los momentos de vuelcos obtenidos son en Nm:

7,153	7,1557	7,1571	7,1596	7,1598	7,1443	7,1472	7,1561	7,1571	7,1556
-------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Los momentos de giro en Nmm:

2,792	4,656	6,2075	5,378	-2,4745	-9,8	-3,0	1,3	2,06	-0,461
-------	-------	--------	-------	---------	------	------	-----	------	--------

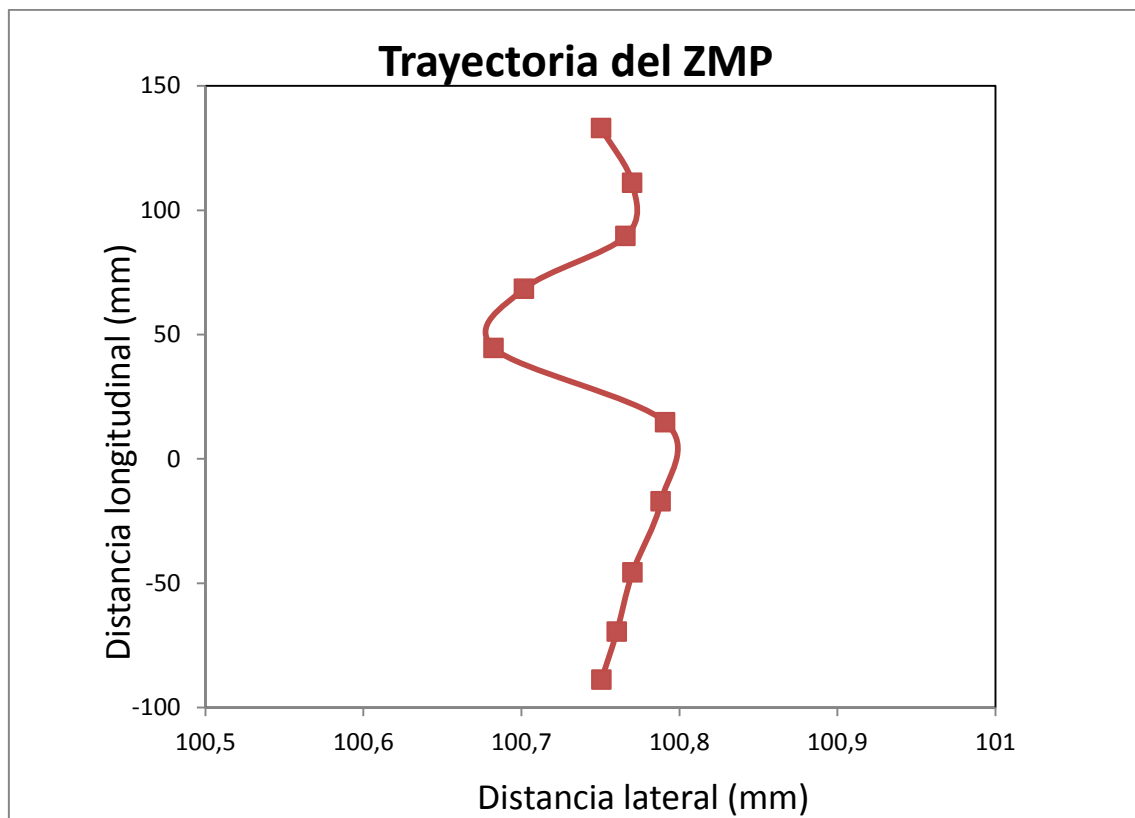
Y los momentos de balanceo en Nm:

-6,310	-4,937	-3,248	-1,219	1,0458	3,1605	4,8538	6,3581	7,8777	9,4394
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Se aprecia que el momento de vuelco y de balanceo es más o menos del mismo orden, los dos son debidos al peso del PASIBOT. Y se aprecia que el momento de giro es muy escaso, esto es lógico ya que en este caso, 0.3 rad/s. Las aceleraciones y velocidades son muy escasas y por eso las fuerzas de inercia son también bajas.

Sabiendo los valores de los momentos que sufre el pie de apoyo, para ver si llega a volcar, girar o balancear, basta con comprobar a qué distancia de ese punto hay que colocar la normal para igualar ese momento, y si ese punto se encuentra fuera de la superficie del pie; iniciará el vuelco, giro o balanceo (teoría del Zero Moment Point).

En la gráfica 25 se muestra la trayectoria del ZMP. Se observa como en el eje x (distancia longitudinal) el punto se desplaza de -88,87 a 132,91mm. Y en el eje y (distancia lateral) se desplaza entre el rango 100,68 y 100,79mm. Esta información es muy útil a la hora de diseñar la superficie del pie para que esté en equilibrio a lo largo del paso. Con la gráfica 25 se sabe que dimensiones tiene que tener el pie del PASIBOT para que no vuelque ni cabecee a la velocidad de $\omega = 0.3 \text{ rad/s}$. [35][36]



gráfica 25: trayectoria del ZMP del bípedo PASIBOT a lo largo de un paso.

Capítulo V

5. Aplicación a un UGV

5.1. Introducción

En este capítulo se aplicará el “análisis mecánico inteligente” a un ugv (unmanned ground vehicle). Con este análisis diferente a los realizados al PASIBOT pero con el mismo enfoque, se pretende mejorar y facilitar el control del ugv. Al poder resolver paramétricamente el problema, podemos ver como varían los resultados en función de los parámetros deseados, comprender, simular y optimizar las funciones objetivo deseadas. Esto es una herramienta importante para ahorrar tiempo, mejorar el control, y la estabilidad y optimizar la navegación del vehículo.

5.1.1. Motivación

Para esta tesis se realizó una estancia en la universidad de Estonia, Tallinn Technikal University TTU [1].

Durante esta estancia se tuvo conocimiento de los trabajos de investigación realizados en el departamento de mecatrónica (Faculty of Mechanical Engineering, mechatronics, Figura 62) de la universidad técnica de Tallinn, TTU, consistentes en el diseño de un UGV, unmanned ground vehicle. Los conocimientos y metodología estudiados en el departamento de mecánica de la UC3M se aplicaron al vehículo UGV con un enfoque orientado a optimizar la navegación y el control pero sin olvidar la ventaja que aporta el análisis del mecanismo desde el punto de vista de la mecánica clásica. Este estudio, conduce a una optimización que permitirá mejorar las estrategias actuales de control del UGV.



Figura 62: Logotipo de Faculty of Mechanical Engineering, mechatronics, TTU.

El desarrollo de vehículos no tripulados es una de las principales líneas de investigación en robótica. No hay duda acerca de todas las ventajas que se han obtenido con los vehículos no tripulados en entornos no estructurados e incluso peligrosos. La Universidad de Tecnología de Tallin está trabajando en el diseño y desarrollo del vehículo terrestre no tripulado (UGV) que se muestra en la Figura 63. Este vehículo todo terreno 4x4 tiene un motor para cada una de sus ruedas, y tiene la particularidad de que cada rueda está unida al chasis (cuerpo)

por una pata articulada de manera que el ángulo entre ésta y el cuerpo puede variar, y por tanto la posición del centro de masa (COM) con respecto a los contactos ruedas-suelo, o la distancia entre el suelo y el cuerpo también serán variables[37][38][39].



Figura 63: El prototipo de UGV construido por la universidad Tallinn University of Technology.

5.1.2. Objetivo

El objetivo de este trabajo es mejorar las capacidades de navegación de un vehículo terrestre no tripulado (UGV) desarrollado por la TTU (véase Figura 63) mediante la optimización de los ángulos entre sus patas y su cuerpo (sus ángulos de ataque), para un perfil de terreno dado. En esta tesis se presenta un programa numérico basado en un modelo de vehículo $\frac{1}{2}$ basado en una aproximación cuasi-estática. La idea es que dado un perfil de terreno introducido o bien por el usuario o leído por un sensor en el vehículo el programa será capaz de calcular cómo los ángulos entre las piernas y el cuerpo deben variar a lo largo de la trayectoria. Sabiendo cómo afecta la variación de los ángulos de ataque en un terreno, se puede encontrar la configuración que mantenga el par de las ruedas lo más constante posible, o el mínimo par, o evitar el derrape, vuelco, etc. Se trata, en definitiva de una optimización. Los resultados pueden ser útiles para mejorar las tareas de control del vehículo, en particular, para superar los obstáculos de manera eficiente.

En primer lugar se presentan algunas consideraciones sobre la nomenclatura y la geometría del vehículo. Se propondrá un modelo cinemático del vehículo a partir de la función que define el perfil. Nos centramos en la posición y / o trayectorias de los puntos notables a emplear. Partiendo de la cinemática se desarrollará el modelo cuasi-estático y se presentarán las ecuaciones para calcular las fuerzas y pares que intervienen. Se desarrollará un algoritmo que calcule la posición a lo

largo de la pista y los ángulos entre las patas y el cuerpo y, a continuación, mediante el uso de las ecuaciones anteriores se encontraran los valores óptimos de esos ángulos que satisfagan una condición dada (como fuerzas normales iguales, par sobre las ruedas constante o mínimo, etc...)

Se realizarán varios análisis mostrando los resultados para diferentes curvas de terreno y se obtendrán una serie de conclusiones. [37][38][39]

5.1.3. Definición de UGV.

En primer lugar, y para entender bien el concepto de UGV, antes es necesario definir el concepto de vehículo no tripulado. Los vehículos no tripulados son un tipo de vehículos que están diseñados para poder desplazarse y moverse, sin necesidad, como su propio nombre indica, de llevar tripulación a bordo. Para conseguir esto, es necesario dotar a este tipo de vehículos de distintas tecnologías y dispositivos que doten al mismo de la autonomía necesaria.

Dentro de este tipo de vehículos, podemos encontrar tres tipos fundamentales de acuerdo al medio que utilizan para moverse. Los tres posibles tipos de vehículos no tripulados serían:

- UUV o Unmanned Underwater Vehicles, son vehículos submarinos no tripulados. En la Figura 64 se observa un ejemplo de UUV, modelo PLUTO PLUS 85.
- UAV o Unmanned Aerial Vehicles, que son vehículos aéreos no tripulados. En la Figura 65 se observa el UAV de uso doméstico diseñado por Parrot, AR drone a control remoto.
- UGV o Unmanned Ground Vehicules, que son vehículos terrestres no tripulados.



Figura 64: UUV PLUTO PLUS 85.



Figura 65: UAV Parrot AR drone.

Como es lógico en este proyecto la atención se va a fijar en el último tipo de vehículo no tripulado, el UGV.

Uno de los orígenes del uso de los UGV fue en el año 1930, en el que la URSS empezó a utilizar un UGV al cual llamaron Teletanks: era un pequeño tanque que solía ser manejado por control remoto desde un tanque convencional. Su función era transportar la munición dentro del campo de batalla sin que los soldados estuviesen en peligro. Fueron utilizados en la Guerra de Invierno contra Finlandia y en el inicio del Frente del Este después de que Alemania invadiese la Unión Soviética en 1941.

También, en 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, los británicos desarrollaron una versión de radio control de su tanque de infantería llamado Matilda II, con la finalidad de conseguir descubrir la localización de los cañones antitanques del enemigo que estaban ocultos intentando reducir al máximo el número de bajas. Finalmente este proyecto no se llegó a desarrollar debido a la fuerte inversión económica que requería.

Por último, en 1942, los alemanes comenzaron a utilizar un vehículo oruga denominado Goliath, y cuya finalidad era la de llevar a cabo trabajos de demolición a distancia. El vehículo contaba con una carga a bordo de 60 kg de explosivo y era controlado a través de un cable. El vehículo no tuvo un gran éxito debido a sus limitaciones como la dependencia de un cable físico, la escasa protección contra el fuego enemigo y su baja velocidad de desplazamiento.

Estos fueron los primeros usos de los UGV, que como se puede ver en sus inicios fueron utilizados principalmente para tareas militares en las que se intentaban reducir las bajas humanas.

Además de esta tarea, actualmente los principales usos de los UGV son:

- Labores de reconocimiento, salvamento o desactivación de explosivos.
- Labores de ámbito militar (el uso más extendido).

- Labores de descontaminación nuclear. Actualmente se están utilizando en Fukushima.
- Labores de exploración. Vehículo mandado a Marte o a la Luna.

Como se puede deducir de las tareas anteriores, la razón principal de utilización de los mismos es su uso en trabajos o tareas en las cuales la presencia de personas no es recomendable debido a que sus vidas pueden correr peligro.

5.1.4. Tipos de UGV:

El criterio más importante a la hora de clasificar un UGV es el método de control del mismo. Hay dos tipos principales de vehículos según esta clasificación; los que son dirigidos por control remoto y, por otro lado, los que son autónomos, es decir, los que son capaces de funcionar por sí mismos. Evidentemente las diferencias entre ambos tipos de vehículo son grandes, siendo los segundos mucho más complejos y caros que los primeros. A continuación se explican ambos tipos de forma más completa:

- UGV dirigidos mediante control remoto:

Estos UGV son aquellos que a pesar de no llevar ninguna persona a bordo, el control y la conducción del mismo se realiza por una persona. Estos a su vez pueden ser inalámbricos o por cable (actualmente casi no se utiliza). Se trata de la forma más primaria de UGV, que debido al avance de la automática y la electrónica está siendo poco a poco sustituida. No obstante, a día de hoy, en ciertos tipos de tareas la intervención humana sigue siendo imprescindible.

- UGV autómatas:

Este tipo de UGV es de origen más reciente que el anterior, y su manejo es totalmente autónomo, es decir, el vehículo se mueve y se dirige por sí mismo. Estos vehículos, tal y como se puede pensar, van unidos de la mano de la automática y la electrónica moderna y su uso está en pleno desarrollo y expansión. Son equipos que cuentan con una alta tecnología lo que los hace más caros y complejos que los anteriores.

Por poner un ejemplo, un vehículo autónomo de este tipo, debe de llevar una gran cantidad de sensores y sistemas de guiado que le permitan orientarse y moverse por sí mismo sorteando las dificultades del terreno. Además, según el uso para el que haya sido desarrollado, el vehículo puede llevar incorporados una gran cantidad de elementos como detectores de explosivos o alguna herramienta.

Pero lo más importante de este tipo de vehículos, es su sistema de control. Este es el encargado de llevar a cabo el guiado del vehículo mientras se mueve. Puede ser un sistema más o menos complejo, que pueden ir desde sistemas simples que controlen el movimiento del vehículo dentro de una trayectoria cerrada y conocida, hasta complejos sistemas que reciben información en tiempo real desde los sensores del vehículo, siendo necesarios en estos casos un sistema de control que trabaje en tiempo real y que tenga una gran capacidad de procesamiento que haga posible el análisis de datos y la toma de decisiones del vehículo de forma casi instantánea.

Dentro de este grupo se encuentra el ugv diseñado por la universidad TTU. Todos los estudios realizados sobre él se han basado en el control. El análisis realizado en esta tesis pretende mejorar el control y facilitar su optimización mediante el “análisis mecánico inteligente”. Una vez realizado, es fácil optimizar y obtener resultados para diferentes simulaciones, terrenos, condiciones, etc... y así poder realizar un control más óptimo y eficiente.

A continuación se van a mostrar algunos ejemplos de UGV empleados a lo largo de la historia y que han tenido cierta importancia o relevancia en ella.

El PACKBOT, véase Figura 66, fue utilizado por primera vez en el año 2004. Fueron inicialmente desarrollados para usos en el espacio, aunque finalmente su uso se ha dedicado a labores de tipo militar.

Es un vehículo controlado por una persona aunque cuenta con determinadas funciones que puede llevar a cabo de forma autónoma. Tiene su principal función en la exploración de ruinas y búsqueda de personas, presentando la ventaja de poder guardarse en una mochila facilitando su transporte.

Actualmente se están utilizando en el desarme del reactor nuclear de Fukushima con la finalidad de evitar que las personas entren en contacto con la radiación.



Figura 66: UGV PACKBOT

EL TALON, véase Figura 67. Este UGV se utiliza principalmente en la desactivación de bombas. Una de sus características más principales es que es capaz de sumergirse en el agua, aguantando una presión máxima de 100 pies.

Se empezó a utilizar en el año 2000 y desde entonces, se han vendido más de 3000 unidades.

Su característica más importante, es que es uno de los UGV más rápidos del mercado, siendo capaz de alcanzar una velocidad lo suficientemente alta como para seguir a un soldado corriendo. Además su autonomía es bastante grande, de unos 7 días.



Figura 67: TALON en una misión de campo

El GLADIATOR, véase Figura 68, es un UGV utilizado por la marina de los Estados Unidos cuyo principal uso es minimizar el riesgo y neutralizar a tiempo las amenazas a la infantería de Marina mediante tareas de exploración/vigilancia y acciones de fuego directo.

Sus características principales son la capacidad de visión tanto de día como de noche, un diseño modular capaz de adaptarse a cualquier configuración, y una alta resistencia al fuego enemigo.

Además, se trata del primer UGV armado, pudiendo llegar a sustituir en según qué casos a los soldados de tierra aumentando su seguridad.



Figura 68: UGV Gladiator

5.2. Nomenclatura del UGV

Siguiendo el organigrama de la Figura 30 se aplica al UGV el “análisis mecánico inteligente”. A continuación se muestra la nomenclatura seguida en esta tesis para desarrollar los modelos cinemático y cuasi-estático del vehículo $\frac{1}{2}$ del UGV. Véase Figura 69 y

Figura 73:

C: CoM del vehículo

L: Longitud del cuerpo

l: longitud de las piernas

φ_r : ángulo de ataque entre la pata trasera y el cuerpo

φ_f : ángulo de ataque entre la pata delantera y el cuerpo

β_b : ángulo de contacto de la rueda trasera

β_F : ángulo de contacto de la rueda delantera

f (x): Función que define el perfil de la pista

g (x): función que define la pista para los centros de las ruedas

mw: masa de la rueda; MB: masa corporal; ml: masa de la pierna

Ff: la fuerza de fricción ejercida por el suelo sobre ambas ruedas. Como el par es igual en ambas ruedas las fuerzas de fricción son iguales también.

Nr.: la fuerza normal ejercida por el suelo sobre la rueda trasera

Nf: la fuerza normal ejercida por el suelo sobre la rueda delantera

T: Par de las ruedas (se supone el mismo en la parte delantera y trasera ruedas).

5.3. Problema de la posición del UGV

Para resolver el problema de la posición se debe resolver primero el problema de posiciones. Específicamente, dada la función del suelo, $f(x)$, la posición de la rueda delantera, x_f y los ángulos de ataque φ_b y φ_f , el problema cinemático se reduce a conocer la posición de la rueda trasera. La pendiente del terreno en x es tal que $\tan(\beta_x) = f'(x)$. También definimos $g(s)$ como el lugar geométrico de los centros de las ruedas (ver Figura 69). [40][41][42]

Así, para una posición de contacto de la rueda delantera de coordenadas x, x_f , la posición del centro de la rueda delantera $(s_f, g(s_f))$ se obtiene como sigue:

$$s = x - r \cdot \sin \beta_x; f(x) \rightarrow g(s) = f(x) + r \cdot \cos \beta_x \quad (1)$$

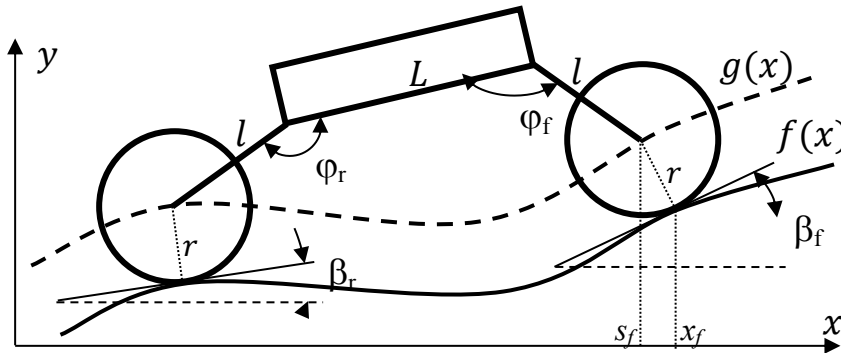


Figura 69: Variables que intervienen en el problema cinemático del UGV.

Para obtener la posición de la rueda trasera y el punto de contacto con el suelo se calcula primero la distancia entre ejes (batalla) en función de los ángulos de ataque. Es decir, para unos determinados valores de los ángulos de ataque, la distancia entre ejes es (véase la Figura 70) :

$$R = [(L - l \cos \varphi_r - l \cos \varphi_f)^2 + l^2 (\sin \varphi_r - \sin \varphi_f)^2]^{1/2} \quad (2)$$

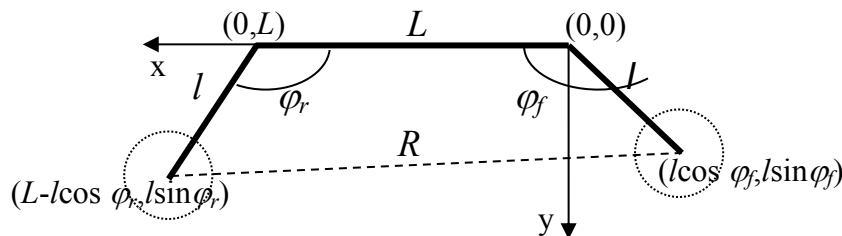


Figura 70: Cálculo de distancia entre ejes

Entonces, el centro de la rueda trasera se encuentra en $g(s)$ a una distancia R del centro de la rueda delantera, por lo tanto se calcula como la intersección entre la circunferencia de radio R centrado en la rueda delantera $(x_f - r \cdot \sin\beta_f, f(x_f) + r \cdot \cos\beta_f)$ y la función $g(s)$ (ver. Figura 71).

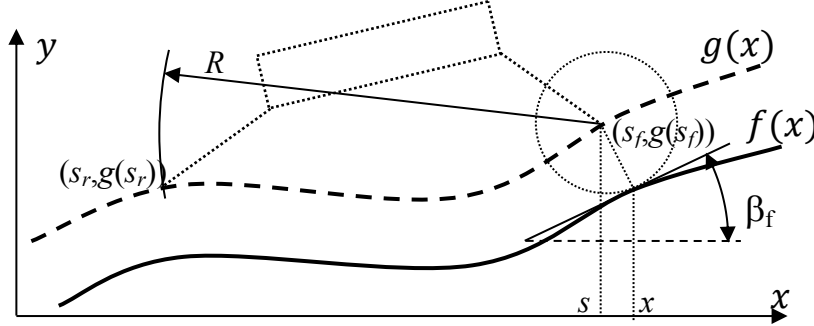


Figura 71: Esquema para la localización del centro de la rueda trasera

Finalmente, para localizar los CoMs necesarios para resolver el problema cuasi-estático, se deben calcular las otras relaciones angulares mostradas en la Figura 72.

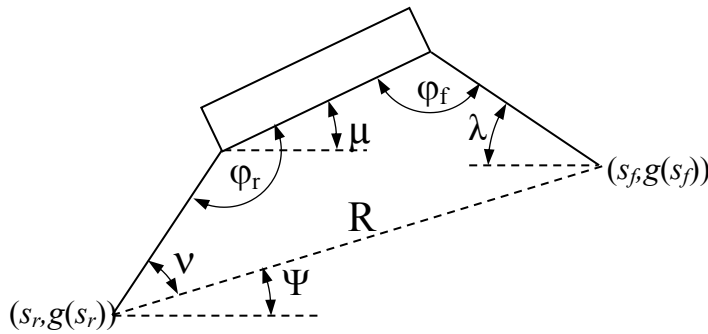


Figura 72: Esquema de cálculo de las variables angulares.

De la Figura 72 se obtiene:

$$\mu = \tan^{-1} \frac{g(s_f) - g(s_b)}{s_f - s_b} \quad \mu = \tan^{-1} \frac{g(s_f) - g(s_r)}{s_f - s_r} \quad \mu = \tan^{-1} \frac{g(s_f) - g(s_b)}{s_f - s_b} \quad (3)$$

$$\nu = \cos^{-1} \frac{-(l \cos \varphi_r)(L - l \cos \varphi_f - l \cos \varphi_r) + (-l \sin \varphi_r)(l \sin \varphi_f - l \sin \varphi_r)}{lR} \quad (4)$$

$$\mu = \varphi_r - 180^\circ + \Psi + \nu \quad (5)$$

$$\lambda = 360 - \varphi_f - \varphi_r - \Psi - \nu \quad (6)$$

5.4. Modelo cuasi-estático

La aproximación cuasi-estática se basa en el equilibrio de fuerzas y momentos. Para resolver este equilibrio se consideran dos subsistemas y así se obtiene el valor del par aplicado a las ruedas (véase la Figura 73). Como el par aplicado a las dos ruedas es el mismo, la fuerza de fricción rueda-suelo tendrá el mismo modulo en ambas ruedas.

$$F \cdot r = T$$

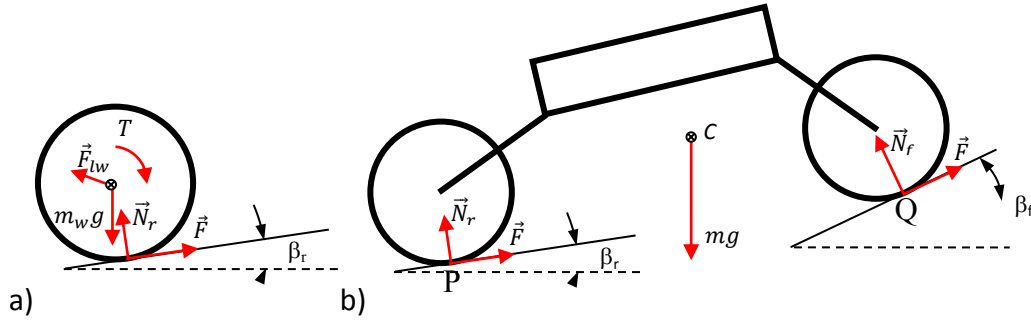


Figura 73: Subsistemas del vehículo

Para el subsistema del vehículo completo, el equilibrio requiere de dos ecuaciones de fuerza y la ecuación de momentos:

$$\begin{cases} F(\cos \beta_r + \cos \beta_f) - N_r \sin \beta_r - N_f \sin \beta_f = 0 \\ F(\sin \beta_r + \sin \beta_f) + N_r \cos \beta_r + N_f \cos \beta_f = mg \\ \overline{CP}_x(F \sin \beta_r + N_r \cos \beta_r) - \overline{CP}_y(F \cos \beta_r - N_r \sin \beta_r) + \\ + \overline{CQ}_x(F \sin \beta_f + N_f \cos \beta_f) - \overline{CQ}_y(F \cos \beta_f - N_f \sin \beta_f) = 0 \end{cases}$$

Es sistema se representa de forma matricial como sigue: $A \cdot F = C$, donde:

$$\begin{pmatrix} (\cos \beta_r + \cos \beta_f) & -\sin \beta_r & -\sin \beta_f \\ (\sin \beta_r + \sin \beta_f) & \cos \beta_r & \cos \beta_f \\ \overline{CP}_x \sin \beta_r - \overline{CP}_y \cos \beta_r + \overline{CQ}_x \sin \beta_f - \overline{CQ}_y \cos \beta_f & \overline{CP}_x \cos \beta_r + \overline{CP}_y \sin \beta_r & \overline{CQ}_x \cos \beta_f + \overline{CQ}_y \sin \beta_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ N_r \\ N_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde los vectores posiciones son calculados, gracias a los resultados del problema de posiciones, de la siguiente forma (ver Figura 74):

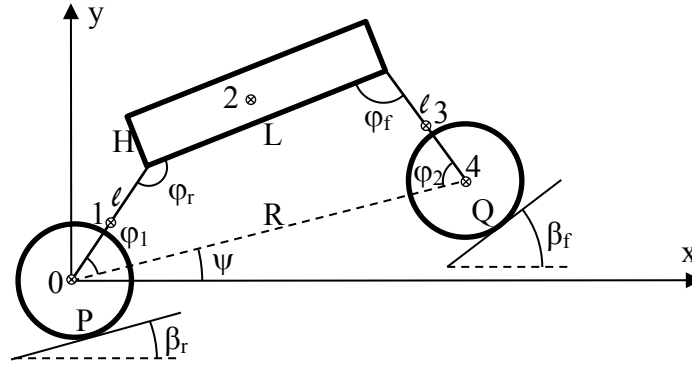


Figura 74: esquema de las posiciones y ángulos del ugv.

Usando el teorema del coseno podemos expresar ϕ_1 y ϕ_2 en función de ϕ_r y ϕ_f :

$$l^2 + R^2 - 2lR \cos \phi_1 = L^2 + l^2 - 2Ll \cos \phi_f \Rightarrow \cos \phi_1 = \frac{R^2 - L^2 + 2Ll \cos \phi_f}{2lR} \quad (7)$$

Y simétricamente

$$\cos \phi_2 = \frac{R^2 - L^2 + 2Ll \cos \phi_r}{2lR} \quad (8)$$

Las coordenadas de los CoM:

$$C_x = \frac{m_l x_1 + m_b x_2 + m_l x_3 + m_w x_4}{m}; C_y = \frac{m_l y_1 + m_b y_2 + m_l y_3 + m_w y_4}{m}$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l}{2} \cos(\psi + \phi_1); y_1 = \frac{l}{2} \sin(\psi + \phi_1) \\ x_2 &= l \cos(\psi + \phi_1) + \frac{L}{2} \cos(\psi + \phi_1 + \phi_r - \pi) - \frac{H}{2} \sin(\psi + \phi_1 + \phi_r - \pi) \\ y_2 &= l \sin(\psi + \phi_1) + \frac{L}{2} \sin(\psi + \phi_1 + \phi_r - \pi) + \frac{H}{2} \cos(\psi + \phi_1 + \phi_r - \pi) \\ x_3 &= R \cos \psi - \frac{l}{2} \cos(\phi_2 - \psi); y_3 = R \sin \psi + \frac{l}{2} \sin(\phi_2 - \psi) \\ x_4 &= R \cos \psi; y_4 = R \sin \psi \end{aligned}$$

Y las coordenadas de los puntos de contacto de las ruedas:

$$\begin{aligned} P_x &= r \sin \beta_r; P_y = -r \cos \beta_r \\ Q_x &= R \cos \psi + r \sin \beta_f; Q_y = R \sin \psi - r \cos \beta_f \end{aligned}$$

Con esto ya está resuelto el problema cuasi-estático, donde se puede obtener fácilmente el coeficiente de rozamiento mínimo entre rueda y terreno para que no deslice:

$$\mu_{min} \geq \text{Max} \left(\frac{F}{N_r}, \frac{F}{N_f} \right)$$

5.5. Algoritmo

Se ha utilizado el código MATLAB para resolver el anterior sistema de tres ecuaciones: para un conjunto discreto de valores de la posición de la rueda delantera. El programa calcula el par que es necesario aplicar (a ambas ruedas) para mantener el vehículo en equilibrio, en todas las combinaciones de un conjunto discreto de valores de los ángulos de ataque φ_r y φ_f .

A continuación, se puede utilizar un criterio “de mínimo par” para minimizar el gasto energético en los motores de las ruedas; o un criterio de “mínima variación de par” con el objetivo de conseguir un régimen lo más estacionario posible de dichos motores; o un “criterio de mínima variación global de par” en un determinado trayecto; también se pueden imponer restricciones a las variaciones de los ángulos de avance de un paso de cálculo al siguiente, o minimizar o limitar la fuerza de rozamiento suelo-rueda que requiere la condición estática, e incluso emplear una combinación de criterios otorgando diferentes pesos a cada uno de ellos en función de la información que se quiera obtener. Para esta optimización, se considerará la función objetivo deseado con las restricciones y penalizaciones con sus respectivos pesos. Las restricciones tomadas han sido impedir el vuelco o impedir el vuelco y el derrape. Y las penalizaciones (términos de la función multiobjetivo):

- diferencia de par con respecto al paso anterior de cálculo.
- distancia recorrida por la rueda trasera (acotar la variación de los ángulos de ataque entre un paso y el siguiente).
- proximidad al vuelco (N_r o $N_f = 0$).
- proximidad al derrape (N_r/r próximo a $\mu_e N_r$ o N_f/r próximo a $\mu_e N_f$).

La función que describe el perfil del suelo, junto con los parámetros geométricos, masas del vehículo y los pesos de la función multiobjetivo a optimizar, son las entradas del programa. Las salidas son los pares para cada combinación de ángulos de ataque, así como las combinaciones que cumplen la condición impuesta a lo largo del perfil de la pista.

Es interesante mostrar, que el inicio del algoritmo podría empezar con una condición inicial: es decir, un punto inicial dado con un valor φ_r y φ_f y comprobar y comparar para el siguiente paso la mejor configuración de ángulos con el fin de optimizar el "criterio de par mínimo" o el "criterio de par constante". O, también podría empezar sin condición inicial, y calcular el “criterio de mínima variación global de par” o simplemente el camino más óptimo en función de los pesos deseados.

En el "criterio de par mínimo", para el primer punto (la rueda delantera se inicia en un punto conocido), el algoritmo calcula todos los pares para todos los ángulos y se inicia en las posiciones de los ángulos que da el par mínimo.

Para el "criterio de par constante", también se debe introducir la condición inicial: el primer punto (el punto de la rueda delantera) y la configuración inicial de los ángulos. Si esta condición inicial es no conocida, el programa seleccionará de forma automática los ángulos que proporcionan el par mínimo en la posición de inicio.[40][41][42]

5.6. Resultados numéricos

A continuación se van a mostrar algunos de los resultados numéricos obtenidos, a modo de ejemplo de la información que se puede obtener con el algoritmo de la mecánica inteligente desarrollada *ad-hoc* para el UGV objeto de estudio. Se podría enfocar para obtener otros muchos criterios o resultados diferentes en función de lo que se desee y de cómo sean las condiciones que se quieren estudiar.

El algoritmo desarrollado se ha utilizado en primer lugar para calcular el par aplicado a ambas ruedas y las fuerzas normales correspondientes, en función de la pendiente, cuando el vehículo sube una rampa. En esta situación, ya que el par no depende de los ángulos de configuración, el algoritmo se ha empleado para encontrar la configuración que proporciona los valores de fuerzas normales trasera y delantera más parecidas (véase Figura 75). Es fácil ver que a medida que la pendiente aumenta, se necesita mayor par motor para mover el vehículo; también que cuanto mayor es la pendiente, mayor debe ser el ángulo entre las piernas y el cuerpo para que las fuerzas normales sean más parecidas (para que el peso del vehículo se distribuya correctamente entre las ruedas delanteras y traseras para evitar problemas de derrape y agarre).

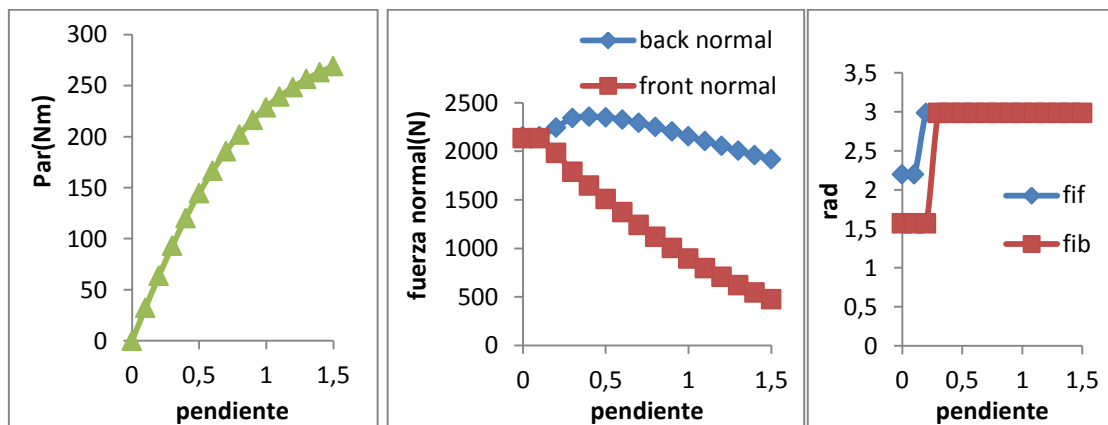


Figura 75: Par, fuerzas normales y ángulos de ataque para diferentes cuestas.

La segunda aplicación del algoritmo trata del paso del vehículo en un escalón. La rueda delantera se representa en Figura 76.a y los resultados se muestran en la Figura 76.b y Figura 76.c El resultado que se obtiene, sería la configuración de ángulos más óptima para subir el escalón usando el mínimo par necesario.

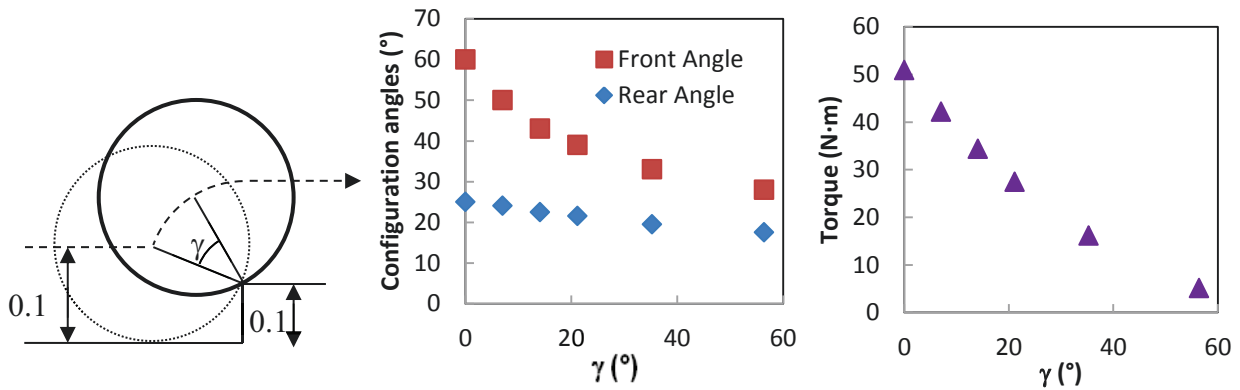


Figura 76: a) Esquema b) ángulos de configuración c) el par del vehículo

En este caso, se utilizó el algoritmo para encontrar las configuraciones que minimizan el par aplicado a las ruedas en cada posición definida por el ángulo γ (véase Figura 76). Como puede verse, los ángulos de configuración disminuyen a medida que la rueda pasa sobre el escalón. Obviamente, el par motor también disminuye hacia el valor nulo, ya que lo normal está cada vez más cerca de la vertical.

En la siguiente Figura 77 se generaliza para un escalón en función del radio de la rueda, y en la Figura 78 se muestra los resultados obtenidos.

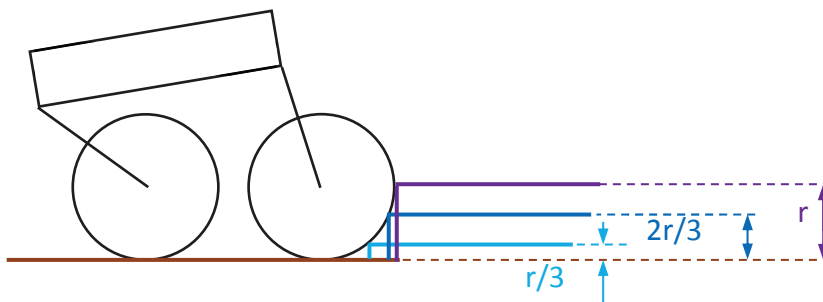


Figura 77: Esquema de la superación de un escalón en función del radio.

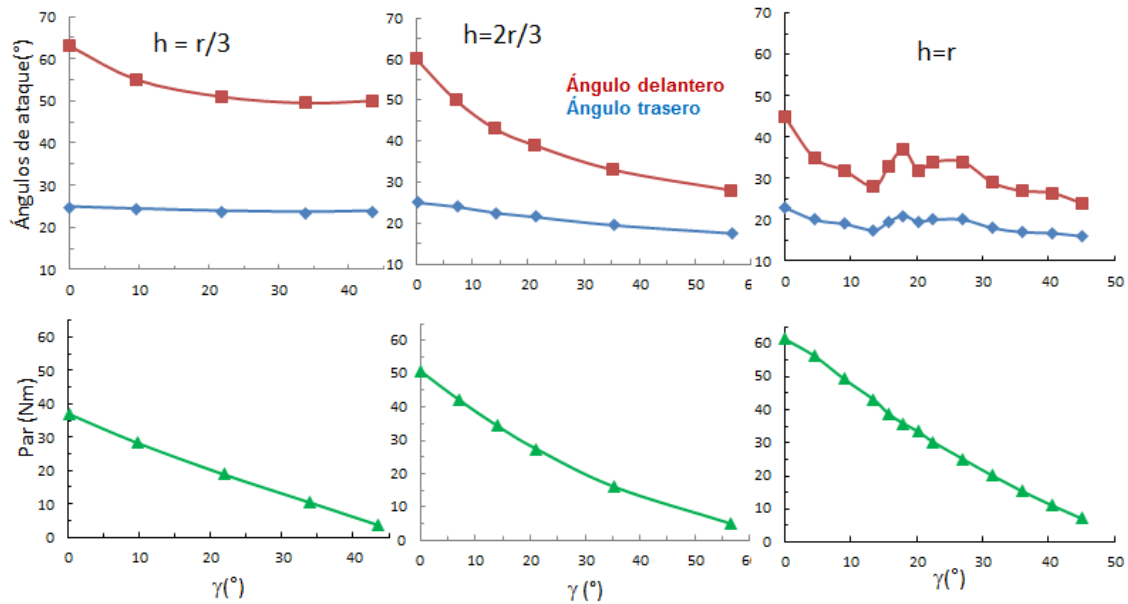


Figura 78. Resultados de la superación de un escalón en función del radio.

Otra aplicación es obtener la posición de los ángulos de ataque que minimiza el par cuando empieza una rampa.

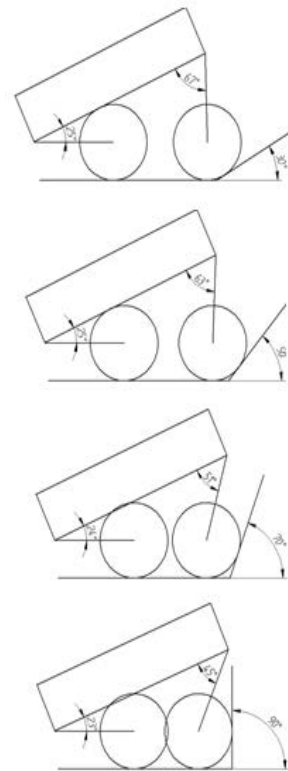
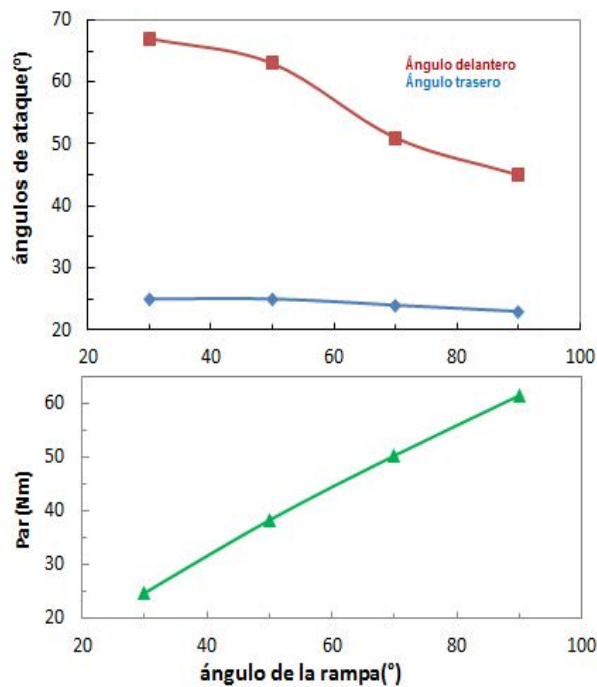


Figura 79. Posición de mínimo para empezar una rampa

Como se muestra en la Figura 79 , se evalúa cuando la rueda de delante empieza a subir y la trasera está en un planto horizontal. En ella se muestra las posiciones de ángulos que minimizan el par para el inicio de rampas de 30° hasta 90°.

Y por último, se muestran los resultados obtenidos del algoritmo optimizando para una función terreno $f(x) = (x + \sin(x))/2$ el camino con los valores de par mínimo. La posición inicial de la rueda delantera del UGV es $x = 0$ m y se desplaza hasta a $x = 0,35$ m. En la Figura 80.a se muestran los valores del par en función de las posibles configuraciones de los ángulos de ataque (ϕ_r y ϕ_f) para la posición inicial. En Figura 80.b se muestran los valores mínimos del par que se pueden obtener en este perfil.

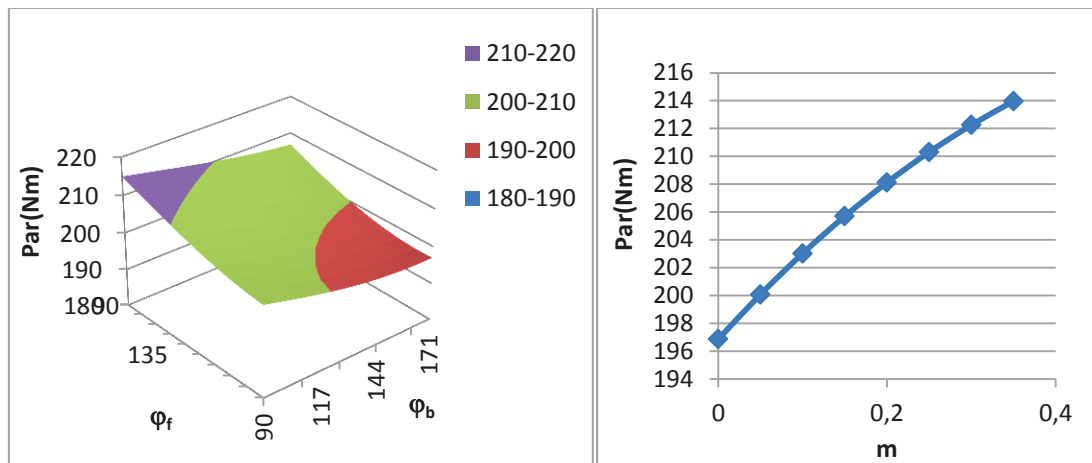


Figura 80: a) Par en función de los ángulos de ataque b) Par mínimo mientras esta en movimiento.

Conociendo el par para cada posición en función de ϕ_r y ϕ_f , son fácilmente calculables las configuraciones a lo largo de un perfil que dan el par mínimo o lo hacen lo más constante posible a lo largo de todo el terreno.

Capítulo VI

6. Conclusiones y trabajos futuros

6.1. Conclusiones

La conclusión general es que se han logrado con éxito los objetivos propuestos inicialmente, es decir:

Se ha aportado una metodología (“análisis mecánico inteligente”) para realizar el estudio completo cinemático y dinámico de mecanismos. Esta metodología conduce al desarrollo de algoritmos paramétricos en los que se basa cualquier proceso de optimización, estudio de sensibilidad, mejora del control y diseño, etc... Los programas han sido diseñados de tal forma que se pueden modificar todos los parámetros. Se ha podido automatizar estos cálculos creando un algoritmo implementado en un lenguaje de programación para poder hallar fácilmente las soluciones y el resultado de los análisis

Esta metodología ha sido aplicada al campo de los robots, en concreto al diseño del robot bípedo PASIBOT.

Se ha aplicado la metodología a otra máquina, un vehículo UGV, obteniendo resultados de optimización de navegación.

6.2. Conclusiones relativas al PASIBOT

Gracias a estos programas, y con algunos de los resultados obtenidos en esta tesis se pueden obtener muchas conclusiones; a continuación se enumeran las conclusiones más significativas obtenidas concernientes al bípedo PASIBOT:

- La primera conclusión y más importante es que el programa diseñado usando la metodología basada en el “análisis mecánico inteligente”, ha sido una herramienta importante en el desarrollo del primer prototipo del PASIBOT. En efecto, el programa ha sido decisivo en fases como la elección del motor, el par de arranque mínimo, las dimensiones de los eslabones, la superficie del pie de apoyo, etc.
- El programa diseñado ha permitido realizar los primeros estudios sobre el deslizamiento pie-suelo del PASIBOT. Pudiendo obtener la velocidad de caminar a la cual empezaría a deslizarse o el coeficiente de fricción pie-suelo mínimo para no deslizarse a cierta velocidad.
- Una conclusión importante es que los eslabones que sufren las fuerzas más altas, los cuales deberían ser reforzados o diseñados con más cuidado son: la cadera y la manivela (eslabones 8 y 14). Este resultado no sorprende, ya que el motor (la manivela, eslabón 8) es el que proporciona la fuerza a todos los eslabones.
- Para el prototipo actual, mediante cálculos de dinámica directa, se ha obtenido el par de arranque (desde una posición inicial en reposo).
- Hay que destacar también que se han calculado los momentos teóricos de giro, vuelco y balanceo así como la flexión y torsión de los eslabones críticos. La inestabilidad del PASIBOT construido es, como ya se suponía, debida a las holguras de las juntas y rodamientos.
- Una conclusión muy importante a la hora de diseñar futuros bípedos PASIBOT es que los datos obtenidos se podrían variar mucho cambiando el grosor y el ancho de los eslabones.

Pero, para las velocidades calculadas (periodos de un segundo) se obtiene que las fuerzas y tensiones que sufre el PASIBOT están muy alejadas de la zona de peligro, con lo cual, se podría reducir el ancho y el espesor notablemente, para perder peso y abaratar el coste por usar menos material: el robot seguiría trabajando alejado de los valores de rotura o deformación.

6.3. Conclusiones relativas al UGV

El “análisis mecánico inteligente” aplicada al problema dinámico de la navegación del UGV nos ha permitido obtener los pares que deben ser aplicados en las ruedas para cualquier configuración de las patas en cualquier terreno. El programa también calcula si el vehículo vuelca y si las ruedas deslizan en cualquier punto de la pista. El programa es válido para cualquier función que describa el perfil del terreno. Esta función perfil del terreno podría ser detectada por un sensor haciendo un control just-in-time para afrontarlo de forma más óptima, o conociendo el terreno, para optimizar el trayecto y las posiciones de los ángulos de ataque de antemano.

Esta herramienta puede ser muy valiosa para realizar un control más óptimo, más apropiado y/o simple dependiendo del perfil del terreno, de obstáculos o de la optimización buscada, etc. Con este “análisis mecánico inteligente” se puede realizar un sin fin de variaciones para obtener resultados en diferentes casos.

Con el programa se pueden obtener las configuraciones para superar terrenos u obstáculos con el mínimo par necesario, la menor variación de par, el par más constante a lo largo de todo el perfil, menor gasto de batería, menor variación de ángulos de ataque o incluso, realizar una optimización multiparamétrica mediante una función objetivo en la que cada parámetro está ponderado con su correspondiente peso en función de su importancia.

Con esta herramienta se ha estudiado el paso de obstáculos, el gasto energético y el par en función de los ángulos de ataque y del terreno a superar.

6.4. Trabajos futuros

Este capítulo es de gran importancia, ya que la gran ventaja de la metodología propuesta del “análisis mecánico inteligente” es la posibilidad de, una vez realizado el análisis, poder estudiar la influencia de los parámetros en el comportamiento dinámico del bípido, optimizaciones o degeneración deseada. La puerta que se abre con el “análisis mecánico inteligente” puede ofrecer muchos análisis, muy diversos y de gran utilidad.

También destacar que los resultados obtenidos de fuerzas y momentos han sido utilizados en muchos trabajos, proyectos y tomados como valores para diseños de prototipos del PASIBOT. Con estos resultados como entrada se puede implementar y seguir investigando para obtener más datos y resultados.

El trabajo futuro abierto gracias a la dinámica directa es amplio:

La herramienta desarrollada abre grandes perspectivas de estudio, con la cual se podría estudiar el par de arranque con deslizamiento, en diferentes condiciones, dándole una inclinación al terreno, aplicando una o varias fuerzas externas, variando la gravedad o carga, etc.. Se podría obtener el movimiento del bípido, si puede dar el paso, cuánto tarda y qué fuerzas requiere y sufre.

Un trabajo futuro es el estudio de la influencia de las holguras:

Se sabe que el prototipo construido por la Universidad Carlos III de Madrid, más concretamente por el grupo MatLab no mantiene el equilibrio en los pasos debido a las holguras en las juntas. Los rodamientos SKF y su colocación proporcionan unos desplazamientos angulares que ocasionan accidentalmente el vuelco del bípido.[43]

La simulación de holguras es una posible aplicación de la cual se podrían obtener resultados muy interesantes y gracias al programa desarrollado se podría implementar. Con esto se podría estudiar cómo se propagan de eslabón a eslabón, variando el movimiento e introduciendo defectos, cómo poder definir el grado y el valor de desplazamiento respecto al ideal, etc...

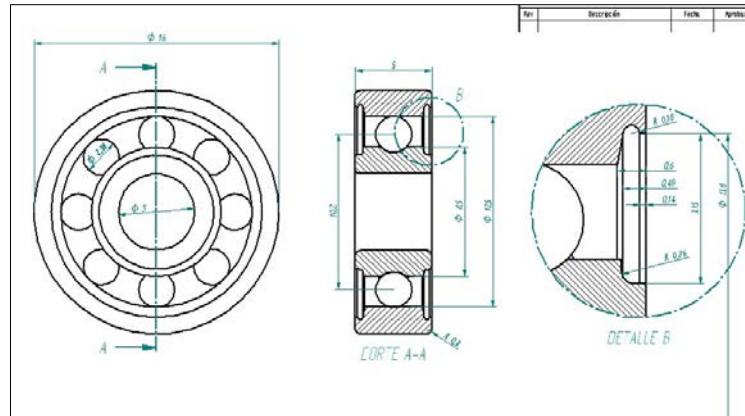


Figura 81: planos del rodamiento SKF utilizado en el PASIBOT

Entre la fase de apoyo simple y doble apoyo hay un instante en el cual el pie golpea el suelo, el cual llamaremos “impacto” y tampoco ha sido estudiado aún:

Este estudio es el más complicado, ya que es cuando el pie del aire hace contacto con el suelo, sufre una fuerza puntual que generara tensiones y un pequeño balanceo a velocidades bajas, pero a velocidades altas el impacto puede ser tan grande que interfiera en la estabilidad del PASIBOT. Este estudio es complicado, y habrá que realizarlo con sistemas similares, tomando varias aproximaciones, y con dinámica directa.

Y por último, se debe comentar que el rozamiento puede ser simulado utilizando otros algoritmos:

Los cálculos realizados con rozamientos han sido muy básicos. Se han considerado coeficientes de rozamiento dinámico y estático constantes. Se podría fácilmente variar el programa para introducir funciones (como por ejemplo: rozamiento en función de la velocidad, temperatura, etc...). Pero, el comportamiento en deslizamiento es una materia más compleja. Referente a esta cuestión, se podrían incluir modelos de fricción más complejos.

6.5. Conclusions

The overall conclusion is that they have succeeded initially proposed objectives, namely:

It has provided a methodology ("intelligent mechanical analysis") for the complete kinematic and dynamic study of mechanisms. This methodology leads to the development of parametric algorithms in which any process optimization, sensitivity study, improved control and design, etc ... The programs have been designed so that you can modify all parameters are based. It was possible to automate these calculations creating an algorithm implemented in a programming language to easily find the solutions and the results of the analyzes

This methodology has been applied to the field of robots, specifically the design of biped robot PASIBOT.

Methodology was applied to another machine, a UGV vehicle, obtaining navigation optimization results.

Capítulo VII

7. Bibliografía

Bibliografía por orden de referencia:

- [1] Tallinn University of Technology, <http://www.ttu.ee/>
(Última visita: 02/12/2013)
- [2] Tallinn University of Technology, Dept. of Mechatronics, "Universal Ground Vehicle", Research proj. L523, 2005-2008.
- [3] Otten E. Inverse and forward dynamics: models of multi-body systems. Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci. 2003;358(1437):1493–1500.
- [4] NEWTON, I. 1687, "Mathematical Principles of Nature Philosophy and his Systems of the World (traducido por COHEN, B. y WHITMAN, A. 1999) University of California Press, New Jersey.
- [5] R. Featherstone, "The Calculation of Robot Dynamics using Articulated-Body Inertias," Int. J. Robotics Research, vol. 2, no. 1, pp. 13-30, 1983.
- [6] Vukobratovic, M. Potnak, V. Dynamics of Manipulation Robots: theory and Application, Springer-Verlag. Berlin. 1982
- [7] GARCIA DE JALON, J. BAYO, E. "Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems- The Real-Time Challenge-" Springer-Verlag, New York, 1993
- [8] SHABANA, A.A., "Computational Dynamics", Wiley, 2001
- [9] SHABANA, A.A., "Dynamics of Multibody Systems", 2nd ed. Cambridge University Press, 1998.
- [10] Unda. J. Garcia de Jalon, J. "Análisis cinemático y dinámico de sistemas mecánicos formados por varios sólidos rígidos" Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería, Vol.1,4,31-48 (1985)
- [11] Haug. E. J. "Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems", Allyn and Bacon, Boston, 1989.
- [12] yo robot, isaac asimov, "tres leyes de la robotica" (1956)
- [13] <http://world.honda.com/ASIMO/history/history.html>
HONDA MOTOR Co. 1948. (Última visita: 3/09/2014)
- [14] <http://www.toyota.co.jp/>
Toyota Motor Corporation. Japón. 1867 (Última visita: 3/09/2008)
- [15] <http://patentados.com/invento/robot-de-desactivacion-de-artefactos-explosivos-minas-y-municiones.html> (Última visita: 20/09/2010)
- [16] <http://www.es-robot.es/> (Última visita: 02/09/2012)
- [17] United States Patent Office 2,140,275 "Walking Toy". John E. Wilson,

Watson, Pa., assignor of one-half to Nod F. Wagner, Watson, Pa. Application October 15, 1936, Serial No. 105,768.

[18] Wisse, M.; Schwab, A. L.; Linde, R. Q. vd. "A 3D passive dynamic biped with yaw and roll compensation". Cambridge University Press. 2001, vol 19, pp. 275–284.

[19] <http://www.youtube.com/watch?v=CK8IFEGmiKY>
Video de Nagoya inst.tech. junio 2005. 4000 pasos (cerca de 33 minutos) de un bipedo pasivo. Yoshito Ikemata, Akihito Sano, y Hideo Fujimoto (Última visita: 4/08/2014)

[20] Corral Abad, E. Análisis mecánico del robot bípedo "PASIBOT"; Proyecto Fin de Carrera. Universidad Carlos III Madrid (octubre del 2008)

[21] J. Meneses; C. Castejón; H. Rubio; E. Corral; J.C.García-Prada, "Kinematics and dynamics of the quasi-passive biped PASIBOT". *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, vol. 57, no. 12, p. 879-887. (2011)

[22] Corral E., Meneses J., Castejón C, García-Prada J.C. Forward and Inverse Dynamics of the Biped PASIBOT. *Int J Adv Robot Syst*, 2014, 11:109. doi: 10.5772/58537

[23] Corral E., Meneses J., García-Prada J.C. INVERSE AND FORWARD DYNAMICS OF THE BIPED PASIBOT. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON MULTIBODY SYSTEMS AND MECHATRONICS (MUSME 2011, Valencia, España)

[24] "Modelado computacional para el análisis dinámico, mediante método matricial, de sistemas multicuerpo de seis elementos" tesis de Juan Carlos Fortes Garrido (25 de septiembre de 2008, Huelva)

[25] Andrew. A. Frank, Bahram Ravani "Dynamic Simulation of legged Machines Using a Compliant Joint Model". University of California-Davis (1987)

[26] Kwum-lon Ting, Jianmin Zhu, Derek Watkins, "The effects of joint clearance on position and orientation deviation of linkages and manipulators" Tennessee technological university, Cookeville, USA, 2000

[27] W.W. Armstrong. Recursive solution to the equations of motion of an n-link manipulator. In *Proceedings of the 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms*, vol. 2, pag. 1343-1346, Montreal, 1979

[28] U. Ascher, D. K. Pai, and B. Cloutier. "Forward dynamics, elimination methods, and formulation stiffness in robot simulation". *International Journal of Robotics Research*, 16(6):749-758, Diciembre, 1997.

[29] M. Anitescu, J. Cremer, and F. Potra. "Formulating 3d contact dynamics problems." *Mechanics of Structures and Machines*, 24(4): 405-437, 1996.

[30] R. Murray, Z. Li, and S. S. Sastry. "A mathematical introduction to robotic manipulation". CRC Press, 1994.

- [31] David J. Montana. "The kinematics of contact and grasp". International Journal of Robotics Research, 7(3):17-32, 1988.
- [32] X. He and A. A. Goldenberg, "An Algorithm for Efficient Computation of Dynamics of Robotic Manipulators," in Proc. of Fourth International Conference on Advanced Robotics, (Columbus, OH), pp. 175-188, Junio 1989.
- [33] M. E. Kahn and B. Roth, "The Near Minimum time Control of Open-loop Articulated Kinematic Chains," Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 93, pp. 164-172, 1971.
- [34] <http://www.mathworks.com/>
MathWorks. Massachusetts 1984. (Última visita: 10/01/2013)
- [35] VUKOBRATOVIC, M., BOROVIAC, B., "zero-moment point-thirty five years of its life. International Journal of Humanoid Robotics. Vol. 1, No1. (2004) 157-173
- [36] JURICIC, D., VUKOVRATOVIC, M. "Mathematical Modeling of Biped Walking Systems (ASME Publ, 1972) 72-WA/BHF-13
- [37] Hiiemaa, M.; Tamre, M. (2012). Low Speed Motion Feedback for the Unmanned Ground Vehicle. In: Proc. of the 8th International Conf. of DAAAM Baltic, Tallinn, Estonia, 19-21 April, 2012. Tallinn University of Technology Press, 2012, 293 - 300.
- [38] Tallinn University of Technology, Dept. of Mechatronics, "Universal Ground Vehicle", Research proj. L523, 2005-2008.
- [39] Sell, R; Aryassov, G; Petritshenko, A; Kaeeli, M. (2012). Kinematics and Dynamics of Configurable Wheel-leg, Proceedings of the 8th International Conference of DAAAM Baltic INDUSTRIAL ENGINEERING, 2012, 345 – 350.
- [40] E. Corral, J. Meneses, G. Aryassov. "A quasi-static approach to optimize the motion of a UGV depending of the track profile. 9th Int. Conf. Vilnius. Lithuania. MSM (2013)
- [41] CORRAL, E., ARYASSOV, G., MENESES, J., "A Quasi-Static Approach to Optimize the Motion of an UGV depending on the Track Profile" Solid State Phenomena Vols. 220-221 (2015) pp 774-780 (2015) Trans Tech Publications, Switzerland doi:10.4028/www.scientific.net/SSP.220-221.774
- [42] E. Corral, J. Meneses, H. Rubio, C. Castejón, J. C. García-Prada. "A configuration optimization algorithm based on quasi-static approach for a UGV". 17th INTERNATIONAL CONFERENCE ON CLIMBING AND WALKING ROBOTS, CLAWARS, University of Technology, Poznan, Poland (2014)
- [43] Jianmin Zhu, Kwun-lon Ting, "Uncertainty analysis of planar and spacial robots with joint clearances" Tennessee technological university, Cookeville, USA, 1999

Capítulo VIII

8. Anexos

Anexos:

A continuación se muestra el programa que realiza el análisis de la cinemática y de la dinámica. Está escrito en el código de MatLab.

MATLAB es el nombre abreviado de “MATriz LABoratory”, un lenguaje de alto rendimiento para cálculos técnicos. Matlab, aparte del cálculo matricial y álgebra lineal, también puede manejar polinomios, funciones, ecuaciones diferenciales ordinarias, gráficos...

Gracias a este programa matemático se pueden realizar las operaciones de esta tesis con un error aproximado del orden de: $2.2204e-016$ (eps).

A continuación se procede a explicar los comandos usados en nuestro programa:

OPERACIONES BÁSICAS

Operación	Símbolo	Expresión en Matlab
suma	+	$a + b$
resta	-	$a - b$
multiplicación	*	$a * b$
división	/	a / b
potencia	^	$a ^ b$

Los comentarios se escriben después del símbolo de tanto por ciento (%), de este modo todo lo que se escriba a continuación en la misma línea no será leído por Matlab. En una línea se pueden separar correctamente: por comas (,) que hacen que se visualicen los resultados o puntos y comas (;) que suprimen la impresión en pantalla

LAS FUNCIONES DE TRIGONOMETRÍA

Función	¿Qué hace?
... (x)	función trigonométrica con el ángulo expresado en radianes
sin (x)	seno (radianes)
cos (x)	coseno
tan (x)	tangente
csc (x)	cosecante
sec (x)	secante
cot (x)	cotangente
... d (x)	función trigonométrica con el ángulo expresado en grados
sind (x)	seno (grados)
...	...
... h (x)	función trigonométrica hiperbólica con el ángulo expresado en radianes
sinh (x)	seno hiperbólico (radianes)
...	...
a... (x)	inversa de la función trigonométrica con el resultado expresado en radianes
asin (x)	arco seno (radianes)
...	...
a... d (x)	inversa de la función trigonométrica con el resultado expresado en grados
asind (x)	arco seno (grados)
...	...
a... h (x)	inversa de la función trigonométrica hiperbólica con el resultado expresado en radianes
asinh (x)	arco seno hiperbólico (radianes)
...	...

VECTORES Y MATRICES

Para crear un vector introducimos los valores deseados separados por espacios (o comas) todo ello entre corchetes []. Si lo que queremos es crear una matriz lo hacemos de forma análoga pero separando las filas con puntos y comas (;).

Generalmente usaremos letras mayúsculas cuando nombremos a las matrices y minúsculas para vectores y escalares. Esto no es imprescindible y Matlab no lo exige, pero resulta útil.

OPERACIONES BÁSICAS CON MATRICES

Símbolo	Expresión	Operación
+	A + B	Suma de matrices
-	A - B	Resta de matrices
*	A * B	Multiplicación de matrices
.*	A .* B	Multiplicación elemento a elemento de matrices
/	A / B	División de matrices por la derecha
./	A ./ B	División elemento a elemento de matrices por la derecha
\	A \ B	División de matrices por la izquierda
.\	A .\ B	División elemento a elemento de matrices por la izquierda
^	A ^ n	Potenciación (n debe ser un número, no una matriz)
.^	A .^ B	Potenciación elemento a elemento de matrices
'	A '	Trasposición compleja conjugada
.'	A .'	Trasposición de matrices

PROGRAMACIÓN DE MATLAB

Matlab es una aplicación que permite programar fácilmente.

SENTENCIA FOR

Un bloque **for** en cada iteración asigna a la variable la columna i-ésima de la expresión y ejecuta las órdenes. La sentencia **for** repite un conjunto de sentencias un número predeterminado de veces.

for variable = expresión

<orden>

<orden>

...

<orden>

end

SENTENCIA IF

Un bloque **if** puede escribirse de varias maneras distintas. Lo que hace es evaluar una expresión lógica y si es cierta ejecuta las órdenes que encuentre antes del **end**.

if <expresión>

<órdenes evaluadas si la expresión es verdadera>

end

Puede que nos interese que en caso de no ejecutar dicha orden ejecute otra distinta. Esto se lo indicaremos usando **else** dentro del bloque.

if <expresión>

<órdenes evaluadas si la expresión es verdadera>

else

<órdenes evaluadas si la expresión es falsa>

End

FUNCIONES EN M-ARCHIVOS

Existen dos tipos de M-archivo, es decir, de archivos con extensión ***.m**. Un tipo son los *ficheros de comandos* (es un archivo *stript*) y el otro son la *funciones*.

El programa usado en esta tesis es un m-file. Un *fichero de comandos* contiene simplemente un conjunto de comandos que se ejecutan sucesivamente cuando se teclea el nombre del fichero en la línea de comandos de Matlab o se incluye dicho nombre en otro fichero ***.m**.

Las *funciones* permiten definir funciones análogas a las de Matlab, con su nombre, argumentos y valores de salida. La primera línea que no sea comentario debe empezar por la palabra **function**, seguida por los valores de salida (entre corchetes [] y separados por comas si hay más de uno), el signo igual (=) y el nombre de la función seguido de los argumentos (entre paréntesis () y separados por comas):

function [a,b,c] = nombre_función (x,y,z)

OTRAS CARACTERÍSTICAS

Función	¿Qué hace?
diff ('f')	derivada de la función respecto a x
diff ('f',t)	derivada parcial de la función respecto a t
diff ('f',n)	derivada n-ésima de la función respecto a x
feval ('f',a)	evalúa la función en a
fminbnd ('f',a,b)	calcula el mínimo de una función de una variable
fzero ('f',a)	busca el cero de una función unidimensional f más próximo al punto a
quad ('f',a,b)	aproxima la integral definida (según la cuadratura de Simpson)
trapz (x,y)	integral numérica trapezoidal de la función formada al emparejar los puntos de los vectores x e y

En el programa se realizan muchas más operaciones, pero no es objetivo de este documento enseñar a usar Matlab, sino dar unas nociones básicas para poder entender el programa que se expone a continuación:

Este programa es el que realiza el análisis inverso del PASIBOT sin deslizar:

El código del programa:

% HAY QUE DAR UN VALOR DE W8

```
function [posi1,velo1,acel1,fuer1,posi2,velo2,acel2,fuer2,posi3,velo3,
acel3,fuer3,posi4,velo4,acel4,fuer4,posi5,velo5,acel5,fuer5,posi6,
velo6,acel6,fuer6,posi7,velo7,acel7,fuer7,posi8,velo8,acel8,fuer8,
posi9,velo9,acel9,fuer9,posi10,velo10,acel10,fuer10] = analisiscompleto(wdato8)
syms x t
teta8=wdato8*t;
% chebyschov
teta7=acos((-4*(cos(teta8))^2+13*cos(teta8)-10+sin(teta8)*(-16*(cos(teta8))^2-
60*cos(teta8)+100)^(1/2))/(25-20*cos(teta8)));
teta9=acos((-4*(cos(teta8))^2+13*cos(teta8)-10-sin(teta8)*(-16*(cos(teta8))^2-
60*cos(teta8)+100)^(1/2))/(-25+20*cos(teta8)));
%extensión
c2masd2=(2.5*(cos(teta7)+cos(teta9)))^2+(2.5*(sin(teta7)+sin(teta9))-12)^2;
teta2=acos((2.5*(cos(teta7)+cos(teta9))*(-27-c2masd2)-(2.5*(sin(teta7)+sin(teta9))-
12)*(144*c2masd2-(-27-c2masd2)^2)^(1/2))/(12*c2masd2));
teta3=acos((2.5*(cos(teta7)+cos(teta9))*(27-c2masd2)+(2.5*(sin(teta7)+sin(teta9))-
12)*(36*c2masd2-(27-c2masd2)^2)^(1/2))/(6*c2masd2));
%estabilización
teta1=pi-asin((5*sin(teta7)-sin(teta8)-4)/4.2);
x11=4.2*cos(teta1)-5*cos(teta7)+cos(teta8);
%ángulos iguales
teta11=0;
teta5=teta1;
teta10=teta1;
teta6=teta2;
teta13=teta2;
teta4=teta3;
teta12=teta3;
teta14=0;
teta14izq=teta14;
teta8izq=teta8+pi;
%se repiten los mismos cálculos que para en el aire:
teta7izq=acos((-4*(cos(teta8izq))^2+13*cos(teta8izq)-10+sin(teta8izq)*(-16*(cos(teta8izq))^2-
60*cos(teta8izq)+100)^(1/2))/(25-20*cos(teta8izq)));
teta9izq=acos((-4*(cos(teta8izq))^2+13*cos(teta8izq)-10-sin(teta8izq)*(-16*(cos(teta8izq))^2-
60*cos(teta8izq)+100)^(1/2))/(-25+20*cos(teta8izq)));
c2masd2izq=(2.5*(cos(teta7izq)+cos(teta9izq)))^2+(2.5*(sin(teta7izq)+sin(teta9izq))-12)^2;
teta2izq=acos((2.5*(cos(teta7izq)+cos(teta9izq))*(-27-c2masd2izq)-
(2.5*(sin(teta7izq)+sin(teta9izq))-12)*(144*c2masd2izq-(-27-
c2masd2izq)^2)^(1/2))/(12*c2masd2izq));
teta3izq=acos((2.5*(cos(teta7izq)+cos(teta9izq))*(27-
c2masd2izq)+(2.5*(sin(teta7izq)+sin(teta9izq))-12)*(36*c2masd2izq-(27-
c2masd2izq)^2)^(1/2))/(6*c2masd2izq));
teta1izq=pi-asin((5*sin(teta7izq)-sin(teta8izq)-4)/4.2);
x11izq=4.2*cos(teta1izq)-5*cos(teta7izq)+cos(teta8izq);
```

```
teta1lizq=0;
teta5izq=teta1izq;
teta10izq=teta1izq;
teta6izq=teta2izq;
teta13izq=teta2izq;
teta4izq=teta3izq;
teta12izq=teta3izq;
%%%%% CAMBIAO DE BASE %%%%
suelofijo=pi-teta1;
teta1=teta1+suelofijo;
teta2=teta2+suelofijo;
teta3=teta3+suelofijo;
teta4=teta4+suelofijo;
teta5=teta5+suelofijo;
teta6=teta6+suelofijo;
teta7=teta7+suelofijo;
teta8=teta8+suelofijo;
teta9=teta9+suelofijo;
teta10=teta10+suelofijo;
teta11=teta11+suelofijo;
teta12=teta12+suelofijo;
teta13=teta13+suelofijo;
teta14=teta14+suelofijo;
  teta1izq=teta1izq+suelofijo;
teta2izq=teta2izq+suelofijo;
teta3izq=teta3izq+suelofijo;
teta4izq=teta4izq+suelofijo;
teta5izq=teta5izq+suelofijo;
teta6izq=teta6izq+suelofijo;
teta7izq=teta7izq+suelofijo;
teta8izq=teta8izq+suelofijo;
teta9izq=teta9izq+suelofijo;
teta10izq=teta10izq+suelofijo;
teta11izq=teta11izq+suelofijo;
teta12izq=teta12izq+suelofijo;
teta13izq=teta13izq+suelofijo;
teta14izq=teta14izq+suelofijo;
%derivamos para calcular las velocidades y aceleraciones angulares
w1=diff(teta1);
w2=diff(teta2);
w3=diff(teta3);
w4=diff(teta4);
w5=diff(teta5);
w6=diff(teta6);
w7=diff(teta7);
w8=diff(teta8);
w9=diff(teta9);
w10=diff(teta10);
w11=diff(teta11);
```

```
w12=diff(teta13);
w13=diff(teta13);
w14=diff(teta14);
w1izq=diff(teta1izq);
w2izq=diff(teta2izq);
w3izq=diff(teta3izq);
w4izq=diff(teta4izq);
w5izq=diff(teta5izq);
w6izq=diff(teta6izq);
w7izq=diff(teta7izq);
w8izq=diff(teta8izq);
w9izq=diff(teta9izq);
w10izq=diff(teta10izq);
w11izq=diff(teta11izq);
w12izq=diff(teta12izq);
w13izq=diff(teta13izq);
w14izq=diff(teta14izq);
alfa1=diff(w1);
alfa2=diff(w2);
alfa3=diff(w3);
alfa4=diff(w4);
alfa5=diff(w5);
alfa6=diff(w6);
alfa7=diff(w7);
alfa8=diff(w8);
alfa9=diff(w9);
alfa10=diff(w10);
alfa11=diff(w11);
alfa12=diff(w12);
alfa13=diff(w13);
alfa14=diff(w14);
alfa1izq=diff(w1izq);
alfa2izq=diff(w2izq);
alfa3izq=diff(w3izq);
alfa4izq=diff(w4izq);
alfa5izq=diff(w5izq);
alfa6izq=diff(w6izq);
alfa7izq=diff(w7izq);
alfa8izq=diff(w8izq);
alfa9izq=diff(w9izq);
alfa10izq=diff(w10izq);
alfa11izq=diff(w11izq);
alfa12izq=diff(w12izq);
alfa13izq=diff(w13izq);
alfa14izq=diff(w14izq);
%%%%%%%%%%%%%% bucle %%%%%%%%%%%%%%%
val(10)=[0];
suma=pi/(wdato8*2)
for i=1:10
```



```
val(i)=suma;
suma=suma+pi/(10*wdato8);
tet1=subs(teta1,t,val(i));
tet2=subs(teta2,t,val(i));
tet3=subs(teta3,t,val(i));
tet4=subs(teta4,t,val(i));
tet5=subs(teta5,t,val(i));
tet6=subs(teta6,t,val(i));
tet7=subs(teta7,t,val(i));
tet8=subs(teta8,t,val(i));
tet9=subs(teta9,t,val(i));
tet10=subs(teta10,t,val(i));
tet11=subs(teta11,t,val(i));
tet12=subs(teta12,t,val(i));
tet13=subs(teta13,t,val(i));
tet14=subs(teta14,t,val(i));
xx11=subs(x11,t,val(i));
tet1izq=subs(teta1izq,t,val(i));
tet2izq=subs(teta2izq,t,val(i));
tet3izq=subs(teta3izq,t,val(i));
tet4izq=subs(teta4izq,t,val(i));
tet5izq=subs(teta5izq,t,val(i));
tet6izq=subs(teta6izq,t,val(i));
tet7izq=subs(teta7izq,t,val(i));
tet8izq=subs(teta8izq,t,val(i));
tet9izq=subs(teta9izq,t,val(i));
tet10izq=subs(teta10izq,t,val(i));
tet11izq=subs(teta11izq,t,val(i));
tet12izq=subs(teta12izq,t,val(i));
tet13izq=subs(teta13izq,t,val(i));
tet14izq=subs(teta14izq,t,val(i));
xx11izq=subs(x11izq,t,val(i));
alf1=subs(alfa1,t,val(i))
alf2=subs(alfa2,t,val(i));
alf3=subs(alfa3,t,val(i));
alf4=subs(alfa4,t,val(i));
alf5=subs(alfa5,t,val(i));
alf6=subs(alfa6,t,val(i))
alf7=subs(alfa7,t,val(i))
alf8=subs(alfa8,t,val(i));
alf9=subs(alfa9,t,val(i))
alf10=subs(alfa10,t,val(i))
alf11=subs(alfa11,t,val(i));
alf12=subs(alfa12,t,val(i));
alf13=subs(alfa13,t,val(i));
alf14=subs(alfa14,t,val(i));
alf1izq=subs(alfa1izq,t,val(i));
alf2izq=subs(alfa2izq,t,val(i));
alf3izq=subs(alfa3izq,t,val(i));
```

```
alf4izq=subs(alfa4izq,t,val(i));
alf5izq=subs(alfa5izq,t,val(i));
alf6izq=subs(alfa6izq,t,val(i));
alf7izq=subs(alfa7izq,t,val(i));
alf8izq=subs(alfa8izq,t,val(i));
alf9izq=subs(alfa9izq,t,val(i));
alf10izq=subs(alfa10izq,t,val(i));
alf11izq=subs(alfa11izq,t,val(i));
alf12izq=subs(alfa12izq,t,val(i));
alf13izq=subs(alfa13izq,t,val(i));
alf14izq=subs(alfa14izq,t,val(i))
ww1=subs(w1,t,val(i))
ww2=subs(w2,t,val(i));
ww3=subs(w3,t,val(i));
ww4=subs(w4,t,val(i));
ww5=subs(w5,t,val(i));
ww6=subs(w6,t,val(i));
ww7=subs(w7,t,val(i));
ww8=subs(w8,t,val(i));
ww9=subs(w9,t,val(i));
ww10=subs(w10,t,val(i));
ww11=subs(w11,t,val(i));
ww12=subs(w12,t,val(i));
ww13=subs(w13,t,val(i));
ww14=subs(w14,t,val(i));
ww1izq=subs(w1izq,t,val(i));
ww2izq=subs(w2izq,t,val(i));
ww3izq=subs(w3izq,t,val(i));
ww4izq=subs(w4izq,t,val(i));
ww5izq=subs(w5izq,t,val(i));
ww6izq=subs(w6izq,t,val(i));
ww7izq=subs(w7izq,t,val(i));
ww8izq=subs(w8izq,t,val(i));
ww9izq=subs(w9izq,t,val(i));
ww10izq=subs(w10izq,t,val(i));
ww11izq=subs(w11izq,t,val(i));
ww12izq=subs(w12izq,t,val(i));
ww13izq=subs(w13izq,t,val(i));
ww14izq=subs(w14izq,t,val(i))
```

%con este subprograma calculo las matrices A y C. la matriz A es la relación entre las fuerzas y momentos, multiplicados por las distancias y coeficientes, con respecto a sus momentos de inercia y %centros de gravedad. Y la matriz C es su inversa.

```
[A,C]=matriz(tet1,tet2,tet3,tet4,tet5,tet6,tet7,tet8,tet9,tet10,tet11,tet12,tet13,xx11,tet1izq,tet2izq,
q,tet3izq,tet4izq,tet5izq,tet6izq,tet7izq,tet8izq,tet9izq,tet10izq,tet11izq,tet12izq,tet13izq,xx11izq)
```

% longitudes de las partes, en [mm]

```
l1=90;      l2=540;      l3=270;      l4=180;
l5=90;      l6=180;      l7=150;      l8=60;
l9=75;      l10=125;     a14=34350;  l11=0;
l12=270;    l13=540;      d2=90;      d3=45;
```

```
d10=27.5;      d=(2.7/1000000);
ancho=20;      espesor=8;
%masas en kg
m1=l1*ancho*espesor*d;      m2=l2*ancho*espesor*d;
m3=l3*ancho*espesor*d;      m4=l4*ancho*espesor*d;
m5=l5*ancho*espesor*d;      m6=l6*ancho*espesor*d;
m7=l7*ancho*espesor*d;      m8=l8*ancho*espesor*d;
m9=l9*ancho*espesor*d;      m10=l10*ancho*espesor*d;
m11=l11*ancho*espesor*d;     m12=l12*ancho*espesor*d;
m13=l13*ancho*espesor*d;     m14=espesor*a14*d*2;
g=9800;
I1=(1/12)*m1*(ancho*ancho+(l1)^2);
I2=(1/12)*m2*(ancho*ancho+(l2)^2);
I3=(1/12)*m3*(ancho*ancho+(l3)^2);
I4=(1/12)*m4*(ancho*ancho+(l4)^2);
I5=(1/12)*m5*(ancho*ancho+(l5)^2);
I6=(1/12)*m6*(ancho*ancho+(l6)^2);
I7=(1/12)*m7*(ancho*ancho+(l7)^2);
I8=(1/12)*m8*(ancho*ancho+(l8)^2);
I9=(1/12)*m9*(ancho*ancho+(l9)^2);
I10=(1/12)*m10*(ancho*ancho+(l10)^2);
I11=(1/12)*m11*(ancho*ancho+(l11)^2);
I12=(1/12)*m12*(ancho*ancho+(l12)^2);
I13=(1/12)*m13*(ancho*ancho+(l13)^2);
I14=d*180074025;
x1x=0;
x1y=0;
v1x=0;
v1y=0;
a1x=0;
a1y=0;
x2x=l1/2+(l2/2)*cos(tet2);
x2y=(l2/2)*sin(tet2);
v2x=-(l2/2)*sin(tet2)*(ww2);
v2y=+(l2/2)*cos(tet2)*(ww2);
a2x=-(l2/2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2/2)*sin(tet2)*(alf2);
a2y=-(l2/2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2/2)*cos(tet2)*(alf2);
x3x=l1/2+(l2)*cos(tet2)+(l3/2)*cos(tet3);
x3y=(l2)*sin(tet2)+(l3/2)*sin(tet3);
v3x=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)-(l3/2)*sin(tet3)*(ww3);
v3y=+(l2)*cos(tet2)*(ww2)+(l3/2)*cos(tet3)*(ww3);
a3x=-(l2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2)*sin(tet2)*(alf2)-(l3/2)*cos(tet3)*(ww3)*(ww3)-
(l3/2)*sin(tet3)*(alf3);
a3y=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2)*cos(tet2)*(alf2)-
(l3/2)*sin(tet3)*(ww3)*(ww3)+(l3/2)*cos(tet3)*(alf3);
x4x=l1/2+(l2/2+d2)*cos(tet2)+(l4/2)*cos(tet4);
x4y=(l2/2+d2)*sin(tet2)+(l4/2)*sin(tet4);
v4x=-(l2/2+d2)*sin(tet2)*(ww2)-(l4/2)*sin(tet4)*(ww4);
v4y=(l2/2+d2)*cos(tet2)*(ww2)+(l4/2)*cos(tet4)*(ww4);
```

```
a4x=-(l2/2+d2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2/2+d2)*sin(tet2)*(alf2)-  
(l4/2)*cos(tet4)*(ww4)*(ww4)-(l4/2)*sin(tet4)*(alf4);  
a4y=-(l2/2+d2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2/2+d2)*cos(tet2)*(alf2)-  
(l4/2)*sin(tet4)*(ww4)*(ww4)+(l4/2)*cos(tet4)*(alf4);  
x5x=l1/2+(l2)*cos(tet2)-l5/2;  
x5y=(l2)*sin(tet2);  
v5x=-(l2)*sin(tet2)*(ww2);  
v5y=(l2)*cos(tet2)*(ww2);  
a5x=-(l2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2)*sin(tet2)*(alf2);  
a5y=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2)*cos(tet2)*(alf2);
```

%eslabón 6 derecho

```
x6x=x4x+(l4/2)*cos(tet4)+(l6/2)*cos(tet6);  
x6y=x4y+(l4/2)*sin(tet4)+(l6/2)*sin(tet6);  
v6x=v4x-(l4/2)*sin(tet4)*(ww4)-(l6/2)*sin(tet6)*(ww6);  
v6y=v4y+(l4/2)*cos(tet4)*(ww4)+(l6/2)*cos(tet6)*(ww6);  
a6x=a4x-(l4/2)*cos(tet4)*(ww4)*(ww4)-(l4/2)*sin(tet4)*(alf4)-(l6/2)*cos(tet6)*(ww6)*(ww6)-  
(l6/2)*sin(tet6)*(alf6);  
a6y=a4y-(l4/2)*sin(tet4)*(ww4)*(ww4)+(l4/2)*cos(tet4)*(alf4)-  
(l6/2)*sin(tet6)*(ww6)*(ww6)+(l6/2)*cos(tet6)*(alf6);  
x7x=l1/2+(l2)*cos(tet2)+(l3)*cos(tet3)+(l7/2)*cos(tet7);  
x7y=(l2)*sin(tet2)+(l3)*sin(tet3)+(l7/2)*sin(tet7);  
v7x=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)-(l3)*sin(tet3)*(ww3)-(l7/2)*sin(tet7)*(ww7);  
v7y=(l2)*cos(tet2)*(ww2)+(l3)*cos(tet3)*(ww3)+(l7/2)*cos(tet7)*(ww7);  
a7x=-(l2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2)*sin(tet2)*(alf2)-(l3)*cos(tet3)*(ww3)*(ww3)-  
(l3)*sin(tet3)*(alf3)-(l7/2)*cos(tet7)*(ww7)*(ww7)-(l7/2)*sin(tet7)*(alf7);  
a7y=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2)*cos(tet2)*(alf2)-  
(l3)*sin(tet3)*(ww3)*(ww3)+(l3)*cos(tet3)*(alf3)-  
(l7/2)*sin(tet7)*(ww7)*(ww7)+(l7/2)*cos(tet7)*(alf7);  
x8x=l1/2+(l2)*cos(tet2)+(l3)*cos(tet3)+(l7)*cos(tet7)-(l8/2)*cos(tet8);  
x8y=(l2)*sin(tet2)+(l3)*sin(tet3)+(l7)*sin(tet7)-(l8/2)*sin(tet8);  
v8x=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)-(l3)*sin(tet3)*(ww3)-(l7)*sin(tet7)*(ww7)+(l8/2)*sin(tet8)*(ww8);  
v8y=+(l2)*cos(tet2)*(ww2)+(l3)*cos(tet3)*(ww3)+(l7)*cos(tet7)*(ww7)-  
(l8/2)*cos(tet8)*(ww8);  
a8x=-(l2)*cos(tet2)*(ww2)*(ww2)-(l2)*sin(tet2)*(alf2)-(l3)*cos(tet3)*(ww3)*(ww3)-  
(l3)*sin(tet3)*(alf3)-(l7)*cos(tet7)*(ww7)*(ww7)-  
(l7)*sin(tet7)*(alf7)+(l8/2)*cos(tet8)*(ww8)*(ww8)+(l8/2)*sin(tet8)*(alf8);  
a8y=-(l2)*sin(tet2)*(ww2)*(ww2)+(l2)*cos(tet2)*(alf2)-  
(l3)*sin(tet3)*(ww3)*(ww3)+(l3)*cos(tet3)*(alf3)-  
(l7)*sin(tet7)*(ww7)*(ww7)+(l7)*cos(tet7)*(alf7)+(l8/2)*sin(tet8)*(ww8)*(ww8)-  
(l8/2)*cos(tet8)*(alf8);  
x9x=x7x+(l9/2)*cos(tet9);  
x9y=x7y+(l9/2)*sin(tet9);  
v9x=v7x-(l9/2)*sin(tet9)*(ww9);  
v9y=v7y+(l9/2)*cos(tet9)*(ww9);  
a9x=a7x-(l9/2)*cos(tet9)*(ww9)*(ww9)-(l9/2)*sin(tet9)*(alf9);  
a9y=a7y-(l9/2)*sin(tet9)*(ww9)*(ww9)+(l9/2)*cos(tet9)*(alf9);  
x10x=l1/2+(l2)*cos(tet2)+(l3)*cos(tet3)+(l10/2)*cos(tet10);  
x10y=(l2)*sin(tet2)+(l3)*sin(tet3)+(l10/2)*sin(tet10);
```

$v_{10x} = (l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (ww_2) - (l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (ww_3) - (l_{10}/2) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (ww_{10});$
 $v_{10y} = (l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (ww_2) + (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (ww_3) + (l_{10}/2) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (ww_{10});$
 $a_{10x} = -(l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (ww_2) \cdot (ww_2) - (l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (alf_2) - (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (ww_3) \cdot (ww_3) -$
 $(l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (alf_3) - (l_{10}/2) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (ww_{10}) \cdot (ww_{10}) - (l_{10}/2) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (alf_{10});$
 $a_{10y} = -(l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (ww_2) \cdot (ww_2) + (l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (alf_2) -$
 $(l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (ww_3) \cdot (ww_3) + (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (alf_3) -$
 $(l_{10}/2) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (ww_{10}) \cdot (ww_{10}) + (l_{10}/2) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (alf_{10});$
 $x_{11x} = l_1/2 + (l_2) \cdot \cos(tet_2) + (l_3) \cdot \cos(tet_3) + (l_{10}) \cdot \cos(tet_{10});$
 $x_{11y} = (l_2) \cdot \sin(tet_2) + (l_3) \cdot \sin(tet_3) + (l_{10}) \cdot \sin(tet_{10});$
 $v_{11x} = -(l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (ww_2) - (l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (ww_3) - (l_{10}) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (ww_{10});$
 $v_{11y} = (l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (ww_2) + (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (ww_3) + (l_{10}) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (ww_{10});$
 $a_{11x} = -(l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (ww_2) \cdot (ww_2) - (l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (alf_2) - (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (ww_3) \cdot (ww_3) -$
 $(l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (alf_3) - (l_{10}) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (ww_{10}) \cdot (ww_{10}) - (l_{10}) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (alf_{10});$
 $a_{11y} = -(l_2) \cdot \sin(tet_2) \cdot (ww_2) \cdot (ww_2) + (l_2) \cdot \cos(tet_2) \cdot (alf_2) -$
 $(l_3) \cdot \sin(tet_3) \cdot (ww_3) \cdot (ww_3) + (l_3) \cdot \cos(tet_3) \cdot (alf_3) -$
 $(l_{10}) \cdot \sin(tet_{10}) \cdot (ww_{10}) \cdot (ww_{10}) + (l_{10}) \cdot \cos(tet_{10}) \cdot (alf_{10});$
 $x_{13x} = l_1/2 + (l_{13}/2) \cdot \cos(tet_{13});$
 $x_{13y} = (l_{13}/2) \cdot \sin(tet_{13});$
 $v_{13x} = (l_{13}/2) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (ww_{13});$
 $v_{13y} = (l_{13}/2) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (ww_{13});$
 $a_{13x} = -(l_{13}/2) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) \cdot (ww_{13}) - (l_{13}/2) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (alf_{13});$
 $a_{13y} = -(l_{13}/2) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) \cdot (ww_{13}) + (l_{13}/2) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (alf_{13});$
 $x_{12x} = l_1/2 + (l_{13}) \cdot \cos(tet_{13}) + (l_{12}/2) \cdot \cos(tet_{12});$
 $x_{12y} = (l_{13}) \cdot \sin(tet_{13}) + (l_{12}/2) \cdot \sin(tet_{12});$
 $v_{12x} = (l_{13}) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) - (l_{12}/2) \cdot \sin(tet_{12}) \cdot (ww_{12});$
 $v_{12y} = (l_{13}) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) + (l_{12}/2) \cdot \cos(tet_{12}) \cdot (ww_{12});$
 $a_{12x} = -(l_{13}) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) \cdot (ww_{13}) - (l_{13}) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (alf_{13}) -$
 $(l_{12}/2) \cdot \cos(tet_{12}) \cdot (ww_{12}) \cdot (ww_{12}) - (l_{12}/2) \cdot \sin(tet_{12}) \cdot (alf_{12});$
 $a_{12y} = -(l_{13}) \cdot \sin(tet_{13}) \cdot (ww_{13}) \cdot (ww_{13}) + (l_{13}) \cdot \cos(tet_{13}) \cdot (alf_{13}) -$
 $(l_{12}/2) \cdot \sin(tet_{12}) \cdot (ww_{12}) \cdot (ww_{12}) + (l_{12}/2) \cdot \cos(tet_{12}) \cdot (alf_{12});$
 $x_{14x} = x_{8x} - (1.8777) \cdot \cos(tet_{14}) + (182.32) \cdot \sin(tet_{14});$
 $x_{14y} = x_{8y} - (182.328) \cdot \cos(tet_{14}) - (1.8777) \cdot \sin(tet_{14});$
 $v_{14x} = v_{8x} + (1.8777) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot (ww_{14}) + (182.32) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (ww_{14});$
 $v_{14y} = v_{8y} + (182.328) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot (ww_{14}) - (1.8777) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (ww_{14});$
 $a_{14x} = a_{8x} + (1.8777) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (ww_{14}) \cdot (ww_{14}) -$
 $(182.32) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot (ww_{14}) \cdot (ww_{14}) + (1.8777) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot (alf_{14}) + (182.32) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (alf_{14});$
 $a_{14y} = a_{8y} + (182.328) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (ww_{14}) \cdot (ww_{14}) + (182.328) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot (alf_{14}) + (1.8777) \cdot \sin(tet_{14}) \cdot$
 $(ww_{14}) \cdot (ww_{14}) - (1.8777) \cdot \cos(tet_{14}) \cdot (alf_{14});$
 $x_{14izqx} = x_{14x}; x_{14izqy} = x_{14y}; v_{14izqx} = v_{14x};$
 $v_{14izqy} = v_{14y}; a_{14izqx} = a_{14x}; a_{14izqy} = a_{14y};$
 $x_{8izqx} = x_{8x}; x_{8izqy} = x_{8y}; v_{8izqx} = v_{8x};$
 $v_{8izqy} = v_{8y}; a_{8izqx} = a_{8x}; a_{8izqy} = a_{8y};$
 $x_{7izqx} = x_{8izqx} - (l_7/2) \cdot \cos(tet_{7izq}) + (l_8/2) \cdot \cos(tet_{8izq});$
 $x_{7izqy} = x_{8izqy} - (l_7/2) \cdot \sin(tet_{7izq}) + (l_8/2) \cdot \sin(tet_{8izq});$
 $v_{7izqx} = v_{8izqx} + (l_7/2) \cdot \sin(tet_{7izq}) \cdot (ww_{7izq}) - (l_8/2) \cdot \sin(tet_{8izq}) \cdot (ww_{8izq});$
 $v_{7izqy} = v_{8izqy} - (l_7/2) \cdot \cos(tet_{7izq}) \cdot (ww_{7izq}) + (l_8/2) \cdot \cos(tet_{8izq}) \cdot (ww_{8izq});$
 $a_{7izqx} = a_{8izqx} + (l_7/2) \cdot \cos(tet_{7izq}) \cdot (ww_{7izq}) \cdot (ww_{7izq}) + (l_7/2) \cdot \sin(tet_{7izq}) \cdot (alf_{7izq}) -$
 $(l_8/2) \cdot \cos(tet_{8izq}) \cdot (ww_{8izq}) \cdot (ww_{8izq}) - (l_8/2) \cdot \sin(tet_{8izq}) \cdot (alf_{8izq});$

$$\begin{aligned}a7izqy &= a8izqy + (l7/2) * \sin(tet7izq) * (ww7izq) * (ww7izq) - (l7/2) * \cos(tet7izq) * (alf7izq) - \\& (l8/2) * \sin(tet8izq) * (ww8izq) * (ww8izq) + (l8/2) * \cos(tet8izq) * (alf8izq); \\x9izqx &= x9x + (l9/2) * \cos(tet9) - (l9/2) * \cos(tet9izq); \\x9izqy &= x9y + (l9/2) * \sin(tet9) - (l9/2) * \sin(tet9izq); \\v9izqx &= v9x - (l9/2) * \sin(tet9) * (ww9) + (l9/2) * \sin(tet9izq) * (ww9izq); \\v9izqy &= v9y + (l9/2) * \cos(tet9) * (ww9) - (l9/2) * \cos(tet9izq) * (ww9izq); \\a9izqx &= a9x - (l9/2) * \cos(tet9) * (ww9) * (ww9) - \\& (l9/2) * \sin(tet9) * (alf9) + (l9/2) * \cos(tet9izq) * (ww9izq) * (ww9izq) + (l9/2) * \sin(tet9izq) * (alf9izq); \\a9izqy &= a9y - \\& (l9/2) * \sin(tet9) * (ww9) * (ww9) + (l9/2) * \cos(tet9) * (alf9) + (l9/2) * \sin(tet9izq) * (ww9izq) * (ww9izq) - \\& (l9/2) * \cos(tet9izq) * (alf9izq); \\x3izqx &= x7izqx - (l3/2) * \cos(tet3izq) - (l7/2) * \cos(tet7izq); \\x3izqy &= x7izqy - (l3/2) * \sin(tet3izq) - (l7/2) * \sin(tet7izq); \\v3izqx &= v7izqx + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (ww3izq) + (l7/2) * \sin(tet7izq) * (ww7izq); \\v3izqy &= v7izqy - (l3/2) * \cos(tet3izq) * (ww3izq) - (l7/2) * \cos(tet7izq) * (ww7izq); \\a3izqx &= a7izqx + (l3/2) * \cos(tet3izq) * (ww3izq) * (ww3izq) + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (alf3izq) + (l7/2) * \cos \\& (tet7izq) * (ww7izq) * (ww7izq) + (l7/2) * \sin(tet7izq) * (alf7izq); \\a3izqy &= a7izqy + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (ww3izq) * (ww3izq) - \\& (l3/2) * \cos(tet3izq) * (alf3izq) + (l7/2) * \sin(tet7izq) * (ww7izq) * (ww7izq) - \\& (l7/2) * \cos(tet7izq) * (alf7izq); \\x2izqx &= x3izqx - (l3/2) * \cos(tet3izq) - (l2/2) * \cos(tet2izq); \\x2izqy &= x3izqy - (l3/2) * \sin(tet3izq) - (l2/2) * \sin(tet2izq); \\v2izqx &= v3izqx + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (ww3izq) + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (ww2izq); \\v2izqy &= v3izqy - (l3/2) * \cos(tet3izq) * (ww3izq) - (l2/2) * \cos(tet2izq) * (ww2izq); \\a2izqx &= a3izqx + (l3/2) * \cos(tet3izq) * (ww3izq) * (ww3izq) + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (alf3izq) + (l2/2) * \cos \\& (tet2izq) * (ww2izq) * (ww2izq) + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (alf2izq); \\a2izqy &= a3izqy + (l3/2) * \sin(tet3izq) * (ww3izq) * (ww3izq) - \\& (l3/2) * \cos(tet3izq) * (alf3izq) + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (ww2izq) * (ww2izq) - \\& (l2/2) * \cos(tet2izq) * (alf2izq); \\x1izqx &= x2izqx - (l2/2) * \cos(tet2izq) + (l1/2) * \cos(tet1izq); \\x1izqy &= x2izqy - (l2/2) * \sin(tet2izq) + (l1/2) * \sin(tet1izq); \\v1izqx &= v2izqx + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (ww2izq) - (l1/2) * \sin(tet1izq) * (ww1izq); \\v1izqy &= v2izqy - (l2/2) * \cos(tet2izq) * (ww2izq) + (l1/2) * \cos(tet1izq) * (ww1izq); \\a1izqx &= a2izqx + (l2/2) * \cos(tet2izq) * (ww2izq) * (ww2izq) + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (alf2izq) - \\& (l1/2) * \cos(tet1izq) * (ww1izq) * (ww1izq) - (l1/2) * \sin(tet1izq) * (alf1izq); \\a1izqy &= a2izqy + (l2/2) * \sin(tet2izq) * (ww2izq) * (ww2izq) - (l2/2) * \cos(tet2izq) * (alf2izq) - \\& (l1/2) * \sin(tet1izq) * (ww1izq) * (ww1izq) + (l1/2) * \cos(tet1izq) * (alf1izq); \\x13izqx &= x1izqx + (l1/2) * \cos(tet1izq) + (l13/2) * \cos(tet13izq); \\x13izqy &= x1izqy + (l1/2) * \sin(tet1izq) + (l13/2) * \sin(tet13izq); \\v13izqx &= v1izqx - (l1/2) * \sin(tet1izq) * (ww1izq) - (l13/2) * \sin(tet13izq) * (ww13izq); \\v13izqy &= v1izqy + (l1/2) * \cos(tet1izq) * (ww1izq) + (l13/2) * \cos(tet13izq) * (ww13izq); \\a13izqx &= a1izqx - (l1/2) * \cos(tet1izq) * (ww1izq) * (ww1izq) - (l1/2) * \sin(tet1izq) * (alf1izq) - \\& (l13/2) * \cos(tet13izq) * (ww13izq) * (ww13izq) - (l13/2) * \sin(tet13izq) * (alf13izq); \\a13izqy &= a1izqy - (l1/2) * \sin(tet1izq) * (ww1izq) * (ww1izq) + (l1/2) * \cos(tet1izq) * (alf1izq) - \\& (l13/2) * \sin(tet13izq) * (ww13izq) * (ww13izq) + (l13/2) * \cos(tet13izq) * (alf13izq); \\x5izqx &= x2izqx + (l2/2) * \cos(tet2izq) + (l5/2) * \cos(tet5izq); \\x5izqy &= x2izqy + (l2/2) * \sin(tet2izq) + (l5/2) * \sin(tet5izq); \\v5izqx &= v2izqx - (l2/2) * \sin(tet2izq) * (ww2izq) - (l5/2) * \sin(tet5izq) * (ww5izq); \\v5izqy &= v2izqy + (l2/2) * \cos(tet2izq) * (ww2izq) + (l5/2) * \cos(tet5izq) * (ww5izq); \end{aligned}$$

a5izqx=a2izqx-(l2/2)*cos(tet2izq)*(ww2izq)*(ww2izq)-(l2/2)*sin(tet2izq)*(alf2izq)-
(l5/2)*cos(tet5izq)*(ww5izq)*(ww5izq)-(l5/2)*sin(tet5izq)*(alf5izq);
a5izqy=a2izqy-(l2/2)*sin(tet2izq)*(ww2izq)*(ww2izq)+(l2/2)*cos(tet2izq)*(alf2izq)-
(l5/2)*sin(tet5izq)*(ww5izq)*(ww5izq)+(l5/2)*cos(tet5izq)*(alf5izq);
x12izqx=x13izqx+(l13/2)*cos(tet13izq)+(l12/2)*cos(tet12izq);
x12izqy=x13izqy+(l13/2)*sin(tet13izq)+(l12/2)*sin(tet12izq);
v12izqx=v13izqx-(l13/2)*sin(tet13izq)*(ww13izq)-(l12/2)*sin(tet12izq)*(ww12izq);
v12izqy=v13izqy+(l13/2)*cos(tet13izq)*(ww13izq)+(l12/2)*cos(tet12izq)*(ww12izq);
a12izqx=a13izqx-(l13/2)*cos(tet13izq)*(ww13izq)*(ww13izq)-(l13/2)*sin(tet13izq)*(alf13izq)-
(l12/2)*cos(tet12izq)*(ww12izq)*(ww12izq)-(l12/2)*sin(tet12izq)*(alf12izq);
a12izqy=a13izqy-(l13/2)*sin(tet13izq)*(ww13izq)*(ww13izq)+(l13/2)*cos(tet13izq)*(alf13izq)-
(l12/2)*sin(tet12izq)*(ww12izq)*(ww12izq)+(l12/2)*cos(tet12izq)*(alf12izq);
x4izqx=x2izqx+(d2)*cos(tet2izq)+(l4/2)*cos(tet4izq);
x4izqy=x2izqy+(d2)*sin(tet2izq)+(l4/2)*sin(tet4izq);
v4izqx=v2izqx-(d2)*sin(tet2izq)*(ww2izq)-(l4/2)*sin(tet4izq)*(ww4izq);
v4izqy=v2izqy+(d2)*cos(tet2izq)*(ww2izq)+(l4/2)*cos(tet4izq)*(ww4izq);
a4izqx=a2izqx-(d2)*cos(tet2izq)*(ww2izq)*(ww2izq)-(l2/2+d2)*sin(tet2izq)*(alf2izq)-
(l4/2)*cos(tet4izq)*(ww4izq)*(ww4izq)-(l4/2)*sin(tet4izq)*(alf4izq);
a4izqy=a2izqy-(d2)*sin(tet2izq)*(ww2izq)*(ww2izq)+(l2/2+d2)*cos(tet2izq)*(alf2izq)-
(l4/2)*sin(tet4izq)*(ww4izq)*(ww4izq)+(l4/2)*cos(tet4izq)*(alf4izq);
x6izqx=x4izqx+(l4/2)*cos(tet4izq)+(l6/2)*cos(tet6izq);
x6izqy=x4izqy+(l4/2)*sin(tet4izq)+(l6/2)*sin(tet6izq);
v6izqx=v4izqx-(l4/2)*sin(tet4izq)*(ww4izq)-(l6/2)*sin(tet6izq)*(ww6izq);
v6izqy=v4izqy+(l4/2)*cos(tet4izq)*(ww4izq)+(l6/2)*cos(tet6izq)*(ww6izq);
a6izqx=a4izqx-(l4/2)*cos(tet4izq)*(ww4izq)*(ww4izq)-(l4/2)*sin(tet4izq)*(alf4izq)-
(l6/2)*cos(tet6izq)*(ww6izq)*(ww6izq)-(l6/2)*sin(tet6izq)*(alf6izq);
a6izqy=a4izqy-(l4/2)*sin(tet4izq)*(ww4izq)*(ww4izq)+(l4/2)*cos(tet4izq)*(alf4izq)-
(l6/2)*sin(tet6izq)*(ww6izq)*(ww6izq)+(l6/2)*cos(tet6izq)*(alf6izq);
x10izqx=x3izqx+(l3/2)*cos(tet3izq)+(l10/2)*cos(tet10izq);
x10izqy=x3izqy+(l3/2)*sin(tet3izq)+(l10/2)*sin(tet10izq);
v10izqx=v3izqx-(l3/2)*sin(tet3izq)*(ww3izq)-(l10/2)*sin(tet10izq)*(ww10izq);
v10izqy=v3izqy+(l3/2)*cos(tet3izq)*(ww3izq)+(l10/2)*cos(tet10izq)*(ww10izq);
a10izqx=a3izqx-(l3/2)*cos(tet3izq)*(ww3izq)*(ww3izq)-(l3/2)*sin(tet3izq)*(alf3izq)-
(l10/2)*cos(tet10izq)*(ww10izq)*(ww10izq)-(l10/2)*sin(tet10izq)*(alf10izq);
a10izqy=a3izqy-(l3/2)*sin(tet3izq)*(ww3izq)*(ww3izq)+(l3/2)*cos(tet3izq)*(alf3izq)-
(l10/2)*sin(tet10izq)*(ww10izq)*(ww10izq)+(l10/2)*cos(tet10izq)*(alf10izq);
x11izqx=l1/2+(l2)*cos(tet2izq)+(l3)*cos(tet3izq)+(l10)*cos(tet10izq);
x11izqy=(l2)*sin(tet2izq)+(l3)*sin(tet3izq)+(l10)*sin(tet10izq);
v11izqx=-(l2)*sin(tet2izq)*(ww2)-(l3)*sin(tet3izq)*(ww3)-(l10)*sin(tet10izq)*(ww10izq);
v11izqy=(l2)*cos(tet2izq)*(ww2)+(l3)*cos(tet3izq)*(ww3)+(l10)*cos(tet10izq)*(ww10izq);
a11izqx=-(l2)*cos(tet2izq)*(ww2)*(ww2)-(l2)*sin(tet2izq)*(alf2izq)-
(l3)*cos(tet3izq)*(ww3izq)*(ww3izq)-(l3)*sin(tet3izq)*(alf3izq)-
(l10)*cos(tet10izq)*(ww10izq)*(ww10izq)-(l10)*sin(tet10izq)*(alf10izq);
a11izqy=-(l2)*sin(tet2izq)*(ww2)*(ww2)+(l2)*cos(tet2izq)*(alf2izq)-
(l3)*sin(tet3izq)*(ww3izq)*(ww3izq)+(l3)*cos(tet3izq)*(alf3izq)-
(l10)*sin(tet10izq)*(ww10izq)*(ww10izq)+(l10)*cos(tet10izq)*(alf10izq);
vector(73,1)=[0]

vector= [

$m2*a2x;$	$m2*g+m2*a2y;$	$I2*alf2;$
$m3*a3x;$	$m3*g+m3*a3y;$	$I3*alf3;$
$m4*a4x;$	$m4*g+m4*a4y;$	$I4*alf4;$
$m5*a5x;$	$m5*g+m5*a5y;$	$I5*alf5;$
$m6*a6x;$	$m6*g+m6*a6y;$	$I6*alf6;$
$m7*a7x;$	$m7*g+m7*a7y;$	$I7*alf7;$
$m8*a8x;$	$m8*g+m8*a8y;$	$I8*alf8;$
$m9*a9x;$	$m9*g+m9*a9y;$	$I9*alf9;$
$m10*a10x;$	$m10*g+m10*a10y;$	$I10*alf10;$
$m11*a11x;$	$m11*g+m11*a11y;$	
$m12*a12x;$	$m12*g+m12*a12y;$	$I12*alf12;$
$m13*a13x;$	$m13*g+m13*a13y;$	$I13*alf13;$
$m14*a14x;$	$m14*g+m14*a14y;$	$I14*alf14;$
$m1*a1izqx;$	$m1*g*m1+m1*a1izqy;$	$I1*alf1izq;$
$m2*a2izqx;$	$m2*g+m2*a2izqy;$	$I2*alf2izq;$
$m3*a3izqx;$	$m3*g+m3*a3izqy;$	$I3*alf3izq;$
$m4*a4izqx;$	$m4*g+m4*a4izqy;$	$I4*alf4izq;$
$m5*a5izqx;$	$m5*g+m5*a5izqy;$	$I5*alf5izq;$
$m6*a6izqx;$	$m6*g+m6*a6izqy;$	$I6*alf6izq;$
$m7*a7izqx;$	$m7*g+m7*a7izqy;$	$I7*alf7izq;$
$m9*a9izqx;$	$m9*g+m9*a9izqy;$	$I9*alf9izq;$
$m10*a10izqx;$	$m10*g+m10*a10izqy;$	$I10*alf10izq;$
$m11*a11izqx;$	$m11*g+m11*a11izqy;$	
$m12*a12izqx;$	$m12*g+m12*a12izqy;$	$I12*alf12izq;$
$m13*a13izqx;$	$m13*g+m13*a13izqy;$	$I13*alf13izq]$

% los centros de gravedad

```
posi=[x1x,x1y,x1izqx,x1izqy;x2x,x2y,x2izqx,x2izqy;x3x,x3y,x3izqx,x3izqy;
x4x,x4y,x4izqx,x4izqy;x5x,x5y,x5izqx,x5izqy;x6x,x6y,x6izqx,x6izqy;
x7x,x7y,x7izqx,x7izqy;x8x,x8y,x8izqx,x8izqy;x9x,x9y,x9izqx,x9izqy;
x10x,x10y,x10izqx,x10izqy;x11x,x11y,x11izqx,x11izqy;x12x,x12y,x12izqx,x12izqy;x13x,x13y,x13iz
qx,x13izqy;x14x,x14y,x14izqx,x14izqy];
velo=[v1x,v1y,v1izqx,v1izqy;v2x,v2y,v2izqx,v2izqy;v3x,v3y,v3izqx,v3izqy;v4x,v4y,v4izqx,v4izqy;
v5x,v5y,v5izqx,v5izqy;v6x,v6y,v6izqx,v6izqy;
v7x,v7y,v7izqx,v7izqy;v8x,v8y,v8izqx,v8izqy;v9x,v9y,v9izqx,v9izqy;
v10x,v10y,v10izqx,v10izqy;v11x,v11y,v11izqx,v11izqy;v12x,v12y,v12izqx,v12izqy;v13x,v13y,v13iz
qx,v13izqy;v14x,v14y,v14izqx,v14izqy];
acel=[a1x,a1y,a1izqx,a1izqy;a2x,a2y,a2izqx,a2izqy;a3x,a3y,a3izqx,a3izqy;a4x,a4y,a4izqx,a4izqy;a
5x,a5y,a5izqx,a5izqy;a6x,a6y,a6izqx,a6izqy;
a7x,a7y,a7izqx,a7izqy;a8x,a8y,a8izqx,a8izqy;a9x,a9y,a9izqx,a9izqy;
a10x,a10y,a10izqx,a10izqy;a11x,a11y,a11izqx,a11izqy;a12x,a12y,a12izqx,a12izqy;a13x,a13y,a13iz
qx,a13izqy;a14x,a14y,a14izqx,a14izqy];
fuer1=C*vector;
fuer=fuer1/1000;
if i==1
    posi1=posi;    velo1=velo;    acel1=acel;    fuer1=fuer; end
if i==2
    posi2=posi;    velo2=velo;    acel2=acel;    fuer2=fuer; end
if i==3
```



```
    posi3=posi;    velo3=velo;    acel3=acel;    fuer3=fuer; end
if i==4
    posi4=posi;    velo4=velo;    acel4=acel;    fuer4=fuer; end
if i==5
    posi5=posi;    velo5=velo;    acel5=acel;    fuer5=fuer; end
if i==6
    posi6=posi;    velo6=velo;    acel6=acel;    fuer6=fuer; end
if i==7
    posi7=posi;    velo7=velo;    acel7=acel;    fuer7=fuer; end
if i==8
    posi8=posi;    velo8=velo;    acel8=acel;    fuer8=fuer; end
if i==9
    posi9=posi;    velo9=velo;    acel9=acel;    fuer9=fuer; end
if i==10
    posi10=posi;    velo10=velo;    acel10=acel;    fuer10=fuer; end
end
```

El código del sub-programa matriz:

%con este programa se calcula la matriz que relaciona las fuerzas,

function

```
[A,C]=matriz(teta1,teta2,teta3,teta4,teta5,teta6,teta7,teta8,teta9,teta10,teta11,teta12,teta13,x11,
,teta1izq,teta2izq,teta3izq,teta4izq,teta5izq,teta6izq,teta7izq,teta8izq,teta9izq,teta10izq,teta11izq,
,teta12izq,teta13izq,x11izq);
```

```
syms x t
```

```
l1=90; l2=540;l3=270;l4=180;    l5=90; l6=180;l7=150;l8=60;
l9=75; l10=125;    a14=34350;    l11=0; l12=270;    l13=540;
d2=90; d3=45;    d10=27.5;    ancho=20;    espesor=8;
21x=-(l2/2)*cos(teta2);    r21y=-(l2/2)*sin(teta2);
r24x=(d2)*cos(teta2);    r24y=(d2)*sin(teta2);
r23x=(l2/2)*cos(teta2);    r23y=(l2/2)*sin(teta2);
r25x=(l2/2)*cos(teta2);    r25y=(l2/2)*sin(teta2);
r35x=-(l3/2)*cos(teta3);    r35y=-(l3/2)*sin(teta3);
r32x=-(l3/2)*cos(teta3);    r32y=-(l3/2)*sin(teta3);
r310x=(l3/2)*cos(teta3);    r310y=(l3/2)*sin(teta3);
r37x=(l3/2)*cos(teta3);    r37y=(l3/2)*sin(teta3);
r36x=(d3)*cos(teta3);    r36y=(d3)*sin(teta3);
r42x=-(l4/2)*cos(teta4);    r42y=-(l4/2)*sin(teta4);
r414x=(l4/2)*cos(teta4);    r414y=(l4/2)*sin(teta4);
r52x=(l5/2)*cos(teta5);    r52y=(l5/2)*sin(teta5);
r53x=(l5/2)*cos(teta5);    r53y=(l5/2)*sin(teta5);
r513x=-(l5/2)*cos(teta5);    r513y=-(l5/2)*sin(teta5);
r512x=-(l5/2)*cos(teta5);    r512y=-(l5/2)*sin(teta5);
r63x=(l6/2)*cos(teta6);    r63y=(l6/2)*sin(teta6);
r614x=-(l6/2)*cos(teta6);    r614y=-(l6/2)*sin(teta6);
r710x=-(l7/2)*cos(teta7);    r710y=-(l7/2)*sin(teta7);
r79x=0;    r79y=0;
r73x=-(l7/2)*cos(teta7);    r73y=-(l7/2)*sin(teta7);
r78x=(l7/2)*cos(teta7);    r78y=(l7/2)*sin(teta7);
```

```
r87x=(18/2)*cos(teta8);      r87y=(18/2)*sin(teta8);
r814x=0;                      r814y=0;
r97x=-(19/2)*cos(teta9);      r97y=-(19/2)*sin(teta9);
r914x=(19/2)*cos(teta9);      r914y=(19/2)*sin(teta9);
r103x=-(110/2)*cos(teta10);    r103y=-(110/2)*sin(teta10);
r107x=-(110/2)*cos(teta10);    r107y=-(110/2)*sin(teta10);
r125x=-(112/2)*cos(teta12);    r125y=-(112/2)*sin(teta12);
r131x=-(113/2)*cos(teta13);    r131y=-(113/2)*sin(teta13);
r1012x=(d10)*cos(teta10);      r1012y=(d10)*sin(teta10);
r1011x=-r103x;                r1011y=-r103y;
r125x=-(112/2)*cos(teta12);    r125y=-(112/2)*sin(teta12);
r1213x=r125x;                  r1213y=r125y;
r1210x=-r125x;                 r1210y=-r125y;
r1110x=0;                      r1110y=0;
r1312x=-r131x;                  r1312y=-r131y;
r135x=-r131x;                  r135y=-r131y;
r914x=-r97x;                    r914y=-r97y;
r144x=61.877729;                r146x=r144x;
r144izqx=r144x;                 r146izqx=r144x;
r144y=-177.672;                 r146y=r144y;
r144izqy=r144y;                 r146izqy=r144y;
r1411x=(x11)*30+1.877729;      r1411izqx=(x11izq)*30+1.877729;
r1411y=62.328;                  r1411izqy=r1411y;
r149x=r144x;                    r149y=182.328;
r14izq9izqx=r149x;             r14izq9izqy=r149y;
r148y=r149y;                    r148yizq=r149y;
r148x=-1.877729;                r148xizq=r148x;
r2izq1izqx=-(12/2)*cos(teta2izq); r2izq1izqy=-(12/2)*sin(teta2izq);
r1izq2izqx=-(11/2)*cos(teta1izq); r1izq2izqy=-(11/2)*sin(teta1izq);
r1izq13izqx=-r1izq2izqx;        r1izq13izqy=-r1izq2izqy;
r2izq4izqx=(d2)*cos(teta2izq);  r2izq4izqy=(d2)*sin(teta2izq);
r3izq2izqx=-(13/2)*cos(teta3izq); r3izq2izqy=-(13/2)*sin(teta3izq);
r3izq6izqx=(d3)*cos(teta3izq);  r3izq6izqy=(d3)*sin(teta3izq);
r4izq2izqx=-(14/2)*cos(teta4izq); r4izq2izqy=-(14/2)*sin(teta4izq);
r5izq2izqx=(15/2)*cos(teta5izq); r5izq2izqy=(15/2)*sin(teta5izq);
r6izq3izqx=(16/2)*cos(teta6izq); r6izq3izqy=(16/2)*sin(teta6izq);
r7izq3izqx=-(17/2)*cos(teta7izq); r7izq3izqy=-(17/2)*sin(teta7izq);
r9izq7izqx=-(19/2)*cos(teta9izq); r9izq7izqy=-(19/2)*sin(teta9izq);
r10izq3izqx=-(110/2)*cos(teta10izq); r10izq3izqy=-(110/2)*sin(teta10izq);
r10izq12izqx=(d10)*cos(teta10izq); r10izq12izqy=(d10)*sin(teta10izq);
r12izq5izqx=-(112/2)*cos(teta12izq); r12izq5izqy=-(112/2)*sin(teta12izq);
r13izq1izqx=-(113/2)*cos(teta13izq); r13izq1izqy=-(113/2)*sin(teta13izq);
r9izq14izqx=(19/2)*cos(teta9izq); r9izq14izqy=(19/2)*sin(teta9izq);
r8izq14izqx=0;                  r8izq14izqy=0;
r8izq7izqx=-(18/2)*cos(teta8);  r8izq7izqy=-(18/2)*sin(teta8);
r7izq8izqx=(17/2)*cos(teta7izq); r7izq8izqy=(17/2)*sin(teta7izq);
r7izq3izqx=-r7izq8izqx;         r7izq3izqy=-r7izq8izqy;
r9izq7izqx=-(19/2)*cos(teta9izq); r9izq7izqy=-(19/2)*sin(teta9izq);
a1=-r21y;                       a2=+r21x;      a3=+r24y;      a4=-r24x;
```

a5=-r32y;	a6=+r32x;	a7=+r36y;	a8=-r36x;
b1=-r42y;	b2=+r42x;	b3=-r52y;	b4=+r52x;
b5=-r63y;	b6=+r63x;	b7=-r73y;	b8=+r73x;
c1=-r87y;	c2=+r87x;	c3=-r97y;	c4=+r97x;
c5=-r103y;	c6=+r103x;	c7=r1012y;	c8=-r1012x;
d1=+r125y;	d2=-r125x;	d3=-d1;	d4=-d2;
d5=-r131y;	d6=+r131x;	d7=-d5;	d8=-d6;
e1=-r144y;	e2=+r144x;	e3=-r148y;	e4=+r148x;
e5=-r149y;	e6=+r149x;	e7=+r144y;	e8=-r144x;
e9=r1411x;	f1=-e5;	f2=-e6;	f3=-r1411izqx;
f4=r1izq2izq;	f5=-r1izq2izqx;	f6=r1izq13izqy;	f7=-r1izq13izqx;
f8=-r2izq1izqy ;f9=r2izq1izqx ;		g1=r2izq4izqy;	g2=-r2izq4izqx;
g3=-r3izq2izqy; g4=r3izq2izqx;		g5=r3izq6izqy;	g6=-r3izq6izqx;
g7=-r4izq2izqy; g8=+r4izq2izqx;		h1=-r5izq2izqy; h2=r5izq2izqx;	
h3=-r6izq3izqy; h4=r6izq3izqx;		h5=-r7izq3izqy; h6=r7izq3izqx;	
h7=-h5;	h8=-h6;	i1=r9izq7izqy;	i2=-r9izq7izqx;
i3=-r10izq3izqy;	i4=r10izq3izqx;	i5=+r10izq12izqy;	i6=-r10izq12izqx;
j1=-r12izq5izqy;	j2=r12izq5izqx;	j3=r12izq5izqy;	j4=-r12izq5izqx;
j5=-r13izq1izqy;	j6=r13izq1izqx;	j7=-j5;	j8=-j6;

%A continuación esta los coeficientes de la matriz

[illegible]

[illegible]

[illegible]
$$\text{rango}=\text{rank}(\mathbf{A});$$

```
if rango == 73
```

else

```
display('la matriz no es de rango maximo:no tiene inversa')
```

end

$$C = \text{inv}(A);$$